МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

Факультет «Агропромышленный»
Кафедра « Проектирование и технический сервис транспортно – технологических систем»

Л.В.Кравченко

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТАМАТИКЕ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Учебное пособие

Ростов-на-Дону , 2022

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В соответствии с учебным планом студенты-заочники выполняют по курсу высшей математики ряд контрольных работ.

На внешней обложке тетради нужно указать фамилию и инициалы студента, полный учебный шифр и дату отправления работы.

Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Все вычисления необходимо делать полностью. Для замечаний преподавателя на всех страницах следует оставлять поля.

Задания для контрольных работ студент получает у преподавателя.

Перед выполнением контрольных работ студент должен освоить соответствующие разделы рабочей программы, приведенной ниже. Можно также использовать решения типовых примеров, приведенные в настоящих методических указаниях.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

Определители второго и третьего порядков и их свойства. Разложение определителя по элементам какого-либо строки или столбца. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера. Векторы. Линейные операции над векторами. Теоремы о проекции вектора на ось. Координаты вектора. Линейно-независимые системы векторов. Базис. Разложение вектора по базису Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их основные свойства и нахождение в координатной форме. Арифметические векторы, линейные операции над векторами, пространство R^n. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Геометрический смысл линейной зависимости векторов. Скалярное произведение векторов, ортогональные системы векторов. Базис системы векторов. Базис R^n. Разложение вектора по базису. Собственные векторы и собственные значения матриц. Вывод характеристического уравнения матрицы.

Линейное пространство. Примеры линейных пространств. Размерность пространства. Базис. Переход к новому базису в n-мерном линейном пространстве. Матрица перехода. Линейные отображения, линейные операторы, линейный функционал. Квадратичная форма и ее матрица. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Критерии положительной и отрицательной определенности квадратичных форм.

Отображения. Образ, полный прообраз. Сюръективное, инъективное и биективное отображения. Метрическое пространство. Примеры. Непрерывные отображения метрических пространств.

Линейные пространства. Примеры.Линейная зависимость, линейная независимость элементов линейного пространства. Размерность и базис линейного пространства. Подпространства линейного пространства. Линейные оболочки. Линейные функционалы. Примеры. Ядро линейного функционала. Нормированные пространства. Примеры.

Евклидовы пространства. Ортогональные системы векторов. Примеры евклидовых пространств. Линейные операторы. Непрерывные линейные операторы.

Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.

Метод координат на плоскости. Основные задачи метода координат (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении). Понятие об уравнении линии. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности Пересечение двух прямых. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Канонические уравнения кривых второго порядка: окружности, эллипса, гиперболы, параболы. Асимптоты гиперболы. Преобразования координат. Понятие об общем уравнении кривой второго порядка и приведение его к каноническому виду. Полярная система координат: уравнения некоторых кривых (кардиоида, спираль). Плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости и его частные виды. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности. Уравнения прямой в пространстве (векторное, канонические, параметрические). Общее уравнение прямой и его приведение к каноническому.

Дифференциальное исчисление.

Определение функции. Область определения функции, способы задания функции. График функции, основные сведения из классификации функций. Предел, основные свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства. Натуральные логарифмы. Сравнение бесконечно малых. Порядок малости. Эквивалентные бесконечно малые. Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции. Действия над непрерывными функциями. Формулировка основных свойств функции, непрерывной на сегменте. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной, ее геометрический и механический смысл. Связь с непрерывностью. Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей. Параметрический способ задания функции. Параметрические уравнения окружности, эллипса, циклоиды. Дифференцирование функций, заданных в параметрической форме.

Экстремумы функции. Нахождение наименьших и наибольших значений функции в сегменте. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Асимптоты графика. Схема исследования и построения графика функции по характерным точкам. Вектор-функция скалярного аргумента. Годограф. Предел и непрерывность вектор-функции, ее дифференцирование, геометрический и механический смысл производной. Приложения к механике.

Функции нескольких переменных.

Определение функции нескольких переменных. Область определения. Геометрический смысл функции двух переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных, их геометрический смысл (для случая двух переменных). Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных (формулировка). Полное приращение функции. Теорема о полном приращении. Полный дифференциал функции. Условия, при которых выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом. Дифференцирование неявной функции. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности. Экстремум функции многих переменных (в частности, двух независимых переменных). Необходимое и достаточное условия. Условный экстремум. Отыскание наибольших и наименьших значений функции. Цилиндрические поверхности. Канонические уравнения поверхностей второго порядка, их исследование методом сечений. Прямолинейные образующие.

Интегральное исчисление.

Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов. Интегрирование заменой переменной и по частям. Разложение рациональной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных дробей. Примеры тригонометрических подстановок и методов "рационализации" интегралов. Понятие о неинтегрируемости в элементарных функциях. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, как предел интегральной суммы. Понятие об интегрируемой функции, формулировка теоремы существования. Простейшие свойства определенного интеграла, теорема о среднем. Среднее значение функции. Интеграл с переменным верхним пределом. Связь между определенным интегралом и первообразной функцией. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов способом подстановки и по частям. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей фигур, ограниченных кривыми в декартовой и полярной системах координат, объемов тел по площадям поперечных сечений и тел вращения, длин дуг кривых, площадей поверхностей вращения. Приложения интеграла к решению простейших задач механики и физики: вычисление работы переменной силы, пути при переменной скорости, гидростатического давления, статических моментов и моментов инерции, координат центра тяжести плоских фигур и линий. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от неограниченных функций. Примеры сходящихся и расходящихся несобственных интегралов. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла (в частности, задача об объеме). Двойной интеграл, его определение. Формулировка теоремы о существовании двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Теорема о среднем значении. Вычисление двойного интеграла по прямоугольной и произвольной областям сведением к повторному интегралу. Перемена порядка интегрирования в повторном интеграле. Переход в двойном интеграле к полярным координатам. Формула Грина. Геометрические и физические приложения двойного интеграла: вычисление объемов тел и площадей, массы плоских фигур, моментов инерции и статических моментов, координат центра тяжести плоских фигур. Понятие о тройном интеграле. Задача о вычислении работы переменной силы. Определение криволинейного интеграла по координатам. Его простейшие свойства. Вычисление криволинейного интеграла путем сведения его к определенному интегралу. Криволинейный интеграл по дуге кривой. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу.

Элементы теории поля. Скалярные и векторные поля. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению, градиент и его свойства. Связь градиента с поверхностями и линиями уровня.

Поверхностные интегралы. Основные характеристики полей: поток, ротор, дивергенция. Оператор набла. Гармонические функции.

Комплексные числа.

Комплексные числа, их изображение на плоскости. Алгебраические действия над комплексными числами, свойства модуля и аргумента. Сопряженные комплексные числа. Формула Эйлера. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Дифференциальные уравнения.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Общие определения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие об общем и частном решении. Интегральные кривые. Начальные условия. Изоклины. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения. Формулировка теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Понятие об особом решении. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков, общее и частное решения. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Теорема Коши. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Свойства их решений. Линейно независимые решения. Структура общего решения. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Запись общего решения в зависимости от корней характеристического уравнения. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Отыскание частных решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае специальных видов правой части уравнения. Метод вариации произвольных постоянных. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами высших порядков. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, простейшие приемы их решения.

Ряды.

Последовательности. Числовые последовательности. Признак Вейерштрасса. Числовые ряды, сходимость и расходимость. Необходимое условие сходимости. Расходимость гармонического ряда. Основные свойства сходящихся рядов. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости, основанные на сравнении рядов. Признак Даламбера. Интегральный признак Коши. Обобщенный ряд как пример эталонного ряда. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Абсолютная и условная сходимость. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Свойства суммы степенного ряда: непрерывность, возможность почленного дифференцирования и интегрирования. Ряд Тейлора и Маклорена. Примеры разложения в степенной ряд элементарных функций. Биноминальный ряд. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям: вычисление определенных интегралов, решение дифференциальных уравнений.

Гармонический анализ.

Тригонометрические ряды Фурье. Формулы для коэффициентов ряда. Ряд Фурье для четных и нечетных функций. Формулировка достаточных условий сходимости рядов Фурье. Понятие о практическом гармоническом анализе.

Теория вероятностей.

Понятие вероятности события. Относительная частота события. Связь между вероятностью и относительной частотой. Определение вероятности и ее непосредственный подсчет в схеме случаев. Алгебра событий. Теорема о вероятности суммы и произведения двух событий. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Бернулли. Наивероятнейшая частота при повторении опытов. Случайные величины и законы их распределения. Дискретные и непрерывные случайные величины. Формы задания законов распределения: ряд распределения, функция распределения, плотность распределения. Вероятность попадания случайной величины на данный интервал. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание случайной величины и его связь со средним арифметическим (закон больших чисел). Математическое ожидание линейной функции случайных величин. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайных величин. Дисперсия линейной функции и средней арифметической случайных величин. Примеры законов распределения случайных величин. Закон равномерной плотности. Распределение Пуассона. Биноминальное распределение. Нормальный закон распределения и условия, при которых он возникает. Формулировка центральной предельной теоремы. Числовые характеристики нормального закона. Функция Лапласа. Вычисление вероятности попадания случайной величины на заданный интервал в случае нормального распределения.

Рекомендуемая литература

а) ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи ЮНИТИ, 1998.

2. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1999.

3. Солодовников А.С. и др. Математика в экономике. В 2-х ч. – М.: Финансы и статистика, 1999.

4. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 2003 г.

5.Шипачев В.С. Основы высшей математики. М.: Высшая школа, 2003 г.

6. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высшая школа, 2003 г.

7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистики. М.: Высшая школа, 2003 г.

8. Клетеник Д.В. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии М.: Высшая школа 1998 г.

б) ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е.Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1977.

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1984.

3. Воробьев Н.Н. Теория рядов. М.: Наука, 1986.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 1-3. М.: Наука, 1985.

5. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1986.

6. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. М.: Наука, 1972.

7. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). Часть 1. М.: Высшая школа, 1980.

8. Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики для втузов. М.: Высшая школа, 1970.

9. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.

10. Паталах А.Ф. Задания для аудиторных и внеаудиторных занятий по высшей математике (1 семестр). 1999 г.

11. Паталах А.Ф. Задания для аудиторных и внеаудиторных занятий по высшей математике (2 семестр). 2000 г.

12. Белоконов С.А. Лекции по высшей математике. Часть 1. (учебное пособие) Зерноград, РИА ФГОУ АЧГАА, 2003.

13. Белоконов С.А. Лекции по высшей математике. Часть 2. (учебное пособие). Зерноград, РИА ФГОУ АЧГАА, 2006.

14. Белоконов С.А., Удинцова Н.М. Лекции по высшей математике: комплексные числа, диф.уравнения. ряды. (учебное пособие). Зерноград, РИА ФГОУ АЧГАА, 2004.

Задание №1

В задачах 1 – 25 решить заданную систему уравнений

1) пользуясь формулами Крамера;

2) данную систему уравнений записать в матричной форме и решить с помощью обратной матрицы.

1. $\begin{cases} x+2y-z=-3, \\ 2x-y+3z=9, \\ 5x+y-3z=-2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x-3y-z=2, \\ 2x+5y+3z=1, \\ 4x-6y-2z=10. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x+y-4z=6, \\ 3x-2y-6z=2, \\ x+3y-3z=11. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x+3y+5z=-1, \\ 3x-4y-9z=-2, \\ x+2y-z=4. \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x+5y=-6, \\ x-7y-4z=4, \\ 3x+2y+3z=11. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x-3y+2z=-1, \\ 2x-5y+3z=-4, \\ 4x+2y-z=-12. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 3x-y+5z=-1, \\ 4x+5y+3z=-3, \\ x-3y=10. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x-3y+2z=-3, \\ 2x+4y-z=9, \\ x+2y-2z=12. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x+3y+2z=7, \\ 2x-y-z=3, \\ x-3y-2z=-3. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x-2y+z=-6, \\ 2x-y-z=-9, \\ x+4y-2z=15. \end{cases}$
11. $\begin{cases} 2x+4y+3z=5, \\ 2x-2y-z=5, \\ 2x-2y-3z=-1. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x-3y+2z=0, \\ 3x-2y-z=-7, \\ 4x-4y+3z=10. \end{cases}$
13. $\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 2x-2y-z=6, \\ 3x+4y+3z=6. \end{cases}$
14. $\begin{cases} 2x+2y+3z=-4, \\ 2x-3y-z=0, \\ 4x+2y+3z=2. \end{cases}$
15. $\begin{cases} x-2y-2z=1, \\ 2x+3y+z=-2, \\ 3x+2y+2z=19. \end{cases}$
16. $\begin{cases} x+2y-2z=-20, \\ 3x-3y-z=-3, \\ 10x+2y+3z=-8. \end{cases}$
17. $\begin{cases} x+4y+6z=-4, \\ 2x+5y+6z=-5, \\ 8x+3y-2z=5. \end{cases}$
18. $\begin{cases} 3x-2y-2z=-2, \\ 6x+5y+4z=1, \\ 7x-2y+2z=14. \end{cases}$
19. $\begin{cases} 2x+2y+3z=14, \\ 3x+5y-2z=6, \\ 7x+6y-9z=11. \end{cases}$
20. $\begin{cases} x+3y+2z=1, \\ 2x-y-z=1, \\ x-3y-2z=-1. \end{cases}$
21. $\begin{cases} x+4y+5z=1, \\ 3x-3y+2z=1, \\ 2x+y+7z=-2. \end{cases}$
22. $\begin{cases} x+2y+2z=6, \\ 2x-2y-3z=4, \\ 3x+2y+2z=14. \end{cases}$
23. $\begin{cases} x+3y-5z=-6, \\ 3x-2y+3z=11, \\ 2x-y+2z=7. \end{cases}$
24. $\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ 2x-3y-2z=-1, \\ 2x+2y+5z=-3. \end{cases}$
25. $\begin{cases} x-3y+4z=-1, \\ x+5y-3z=0, \\ 3x+5y-2z=-3. \end{cases}$

Решение типового примера.

1) Используя формулы Крамера, решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$$

Вычислим определитель системы Δ, воспользовавшись следующим правилом вычисления определителей третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

У нас $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-12) + 2(2-9) + 1(8-3) = -20.$

Так как $\Delta \neq 0$, делаем вывод о том, что система имеет единственное решение. Для его отыскания вычислим определители Δx, Δy, Δz.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4(1-12) - (-2)(5+6) + 1(20+2) = 0;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(5+6) - 4(2-9) + 1(-4-15) = 20;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2-20) - (-2)(-4-15) + 4(8-3) = -40.$$

Далее, воспользовавшись формулами Крамера, окончательно получим

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 0;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1;\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2.$$

2) Записать в матричной форме и решить с помощью обратной матрицы систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$$

Пусть A – матрица системы уравнений; X – матрица-столбец неизвестных x, y, z и B – матрица-столбец из свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме система запишется в виде: $A \cdot X = B$, а ее решение будет иметь вид: $X = A^{-1} \cdot B$. Найдем матрицу, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения $(i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3)$ к элементам a_{ij} матрицы A.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 9) = 7$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(-2 - 4) = 6$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$;

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(4 + 6) = -10$; $A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7$;

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 2) = -1$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$.

Тогда $A^{-1} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -11 & 6 & -7 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & -\frac{3}{10} & \frac{7}{20} \\ -\frac{7}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{44}{20} - \frac{15}{10} - \frac{14}{20} \\ -\frac{28}{20} + \frac{5}{10} - \frac{2}{20} \\ -\frac{4}{4} + \frac{5}{2} + \frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$x = 0; \; y = -1; \; z = 2.$$

Задание №2

Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трёх видов: сапог, кроссовок и ботинок , при этом используется сырьё трёх типов: S_1, S_2, S_3. Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объём расхода сырья на 1 день заданы таблицей:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну пару, усл.ед.			Расход сырья на 1 день, усл. ед.
	Сапоги	Кроссовки	Ботинки	
S_1	a	b	c	d_1
S_2	b	c	a	d_2
S_3	c	b	a	d_3

Найти ежедневный объём выпуска каждого вида обуви.

№ варианта	a	b	c	d_1	d_2	d_3
26	1	2	3	80	90	80
27	2	3	5	130	150	130
28	1	1	4	70	100	70
29	4	1	3	90	110	90
30	2	2	1	70	60	70
31	1	4	2	110	90	110
32	3	1	4	90	120	90
33	1	4	5	140	150	140
34	5	1	2	90	100	90
35	4	3	1	110	90	110
36	0	4	1	90	60	90
37	3	1	5	100	140	100
38	1	3	4	110	120	110
39	5	0	1	60	60	60
40	1	6	2	150	110	150
41	2	1	4	180	110	80
42	1	3	7	140	180	140
43	0	4	1	90	90	90
44	2	1	5	90	100	90
45	1	3	5	120	140	120
46	2	3	1	200	140	220
47	4	2	3	190	190	200
48	3	5	1	130	140	160
49	4	1	3	70	150	75
50	4	1	2	105	140	125

Решение типовых примеров

Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трёх видов: сапог, кроссовок и ботинок, при этом используется сырьё трёх типов: S_1, S_2, S_3. Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объём расхода сырья на 1 день заданы таблицей:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну пару, усл.ед.			Расход сырья на 1 день, усл. ед.
	Сапоги	Кроссовки	Ботинки	
$\mathbf{S_1}$	5	3	4	270
$\mathbf{S_2}$	2	1	1	90
$\mathbf{S_3}$	3	2	2	160

Найти ежедневный объём выпуска каждого вида обуви.

Решение.

Пусть ежедневно фабрика выпускает x пар сапог, y пар кроссовок и z пар ботинок. Тогда в соответствии с расходом сырья каждого вида имеем систему:

$$\begin{cases} 5x+3y+4z=270 \\ 2x+y+z=90 \\ 3x+2y+2z=160. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Первую строку умножим на $-\frac{2}{5}$ и прибавим ко второй, затем первую строку умножим на $-\frac{3}{5}$ и прибавим к третьей.

$$\begin{cases} 5x+3y+4z=270 \\ -\frac{1}{5}y-\frac{3}{5}z=-18 \\ \frac{1}{5}y-\frac{2}{5}z=-2 \quad \lrcorner + \end{cases} \quad \begin{cases} 5x+3y+4z=270 \\ -\frac{1}{5}y-\frac{3}{5}z=-18 \\ -z=-20 \end{cases} \quad \begin{matrix} 5x=270-90-80, \quad x=20 \\ y=18\cdot 5-3\cdot 20=30 \\ \Rightarrow z=20 \end{matrix}$$

Таким образом, фабрика выпускает 20 пар сапог, 30 пар кроссовок и 20 пар ботинок.

Задание №3

Даны координаты вершин треугольника *ABC*. Найти:

1) длину стороны *AB* треугольника;
2) уравнение стороны *BC* треугольника и её угловой коэффициент;
3) внутренний угол C;
4) уравнение высоты *AD*;
5) уравнение медианы *BE* и координаты точки *M* пересечения этой медианы с высотой AD;
6) уравнение прямой, проходящей через точку *M* параллельно стороне *CB*;
7) сделать чертеж в системе координат *xOy*.

51.	$A(15;17)$,	$B(-1;4)$,	$C(11;-5)$.
52.	$A(4;13)$,	$B(-6;8)$,	$C(6;-1)$.
53.	$A(0;10)$,	$B(-10;5)$,	$C(2;-4)$.
54.	$A(7;15)$,	$B(-3;10)$,	$C(9;1)$.
55.	$A(10;8)$,	$B(0;3)$,	$C(12;-6)$.
56.	$A(5;14)$,	$B(-5;9)$,	$C(7;0)$.
57.	$A(7;19)$,	$B(-9;6)$,	$C(3;-3)$.
58.	$A(8;12)$,	$B(-2;7)$,	$C(10;-2)$.
59.	$A(17;13)$,	$B(1;0)$,	$C(13;-9)$.
60.	$A(3;9)$,	$B(-7;4)$,	$C(5;-5)$.
61.	$A(12;23)$,	$B(-4;10)$,	$C(8;1)$.
62.	$A(8;10)$,	$B(-8;-3)$,	$C(4;-12)$.
63.	$A(16;15)$,	$B(0;2)$,	$C(12;-7)$.
64.	$A(18;18)$,	$B(2;5)$,	$C(14;-4)$.
65.	$A(4;12)$,	$B(-12;-1)$,	$C(0;-10)$.
66.	$A(13;11)$,	$B(3;6)$,	$C(15;-3)$.
67.	$A(6;17)$,	$B(-4;12)$,	$C(8;3)$.

68.	$A(6;22)$,	$B(-10;9)$,	$C(2;0)$.
69.	$A(14;6)$,	$B(4;1)$,	$C(16;-8)$.
70.	$A(11;20)$,	$B(-5;7)$,	$C(7;-2)$.
71.	$A(2;3)$,	$B(-14;-10)$,	$C(-2;-19)$.
72.	$A(1;-3)$,	$B(-9;-8)$,	$C(3;-17)$.
73.	$A(8;6)$,	$B(-8;-7)$,	$C(4;-16)$.
74.	$A(7;5)$,	$B(-3;0)$,	$C(9;-9)$.
75.	$A(6;9)$,	$B(-10;-4)$,	$C(2;-13)$.

Решение типового примера.

Даны координаты точек $A(2;1)$, $B(8;4)$, $C(1;11)$.

1. Расстояние между точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,, \qquad (1)$$

воспользовавшись которой находим длину стороны AB: $AB=\sqrt{(8-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

2. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки плоскости $B(x_1;y_1)$ и $C(x_2;y_2)$ имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2)$$

Подставляя в (2) координаты точек B и C, получаем уравнение стороны BC:
$\frac{x-8}{1-8}=\frac{y-4}{11-4}$; $\frac{x-8}{-7}=\frac{y-4}{7}$; $\frac{x-8}{-1}=\frac{y-4}{1}$; $x-8=-y+4$; $x+y-12=0\,(BC)$.

Угловой коэффициент k_{BC} прямой BC найдем, преобразовав полученное уравнение к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом $y=kx+b$.

У нас $y=-x+12$, откуда $k_{BC}=-1$.

3. Для нахождения внутреннего угла нашего треугольника воспользуемся формулой

$$tgC=\frac{k_{BC}-k_{AC}}{1+k_{BC}k_{AC}}. \qquad (3)$$

Отметим, что порядок вычисления разности угловых коэффициентов, стоящей в числителе этой дроби, зависит от взаимного расположения прямых BC и AC.

Для того, чтобы найти угловой коэффициент прямой AC, проходящей через две заданные точки плоскости $A(x_1;y_1)$ и $C(x_2;y_2)$, воспользуемся формулой

$$k_{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (4)$$

Тогда $k_{AC} = \dfrac{1-2}{11-1} = -10$. Следовательно, $tgB = \dfrac{10-1}{1+10} = \dfrac{9}{11} \approx 0{,}8182$. Теперь, воспользовавшись таблицами В.М.Брадиса или инженерным микрокалькулятором, получаем $B \approx 0{,}686$ рад.

4. Для составления высоты AD воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k, которое имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{5}$$

и условием перпендикулярности прямых BC и AD, которое выражается соотношением $k_{BC} \cdot k_{AD} = -1$, откуда $k_{AD} = -\dfrac{1}{k_{BC}} = 1$. Подставив в (5) вместо k значение $k_{AD} = 1$, а вместо x_0, y_0 координаты точки A, получим уравнение высоты AD: $y - 1 = 1(x-2)$; $x - y - 1 = 0$ (AD).

5. Для составления уравнения медианы BE найдем сначала координаты точки E, которая лежит на середине отрезка AC:

$x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$; $y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1+11}{2} = 6$.

Теперь, подставив в (2) координаты точек B и E, получаем уравнение медианы: $\dfrac{x-\frac{3}{2}}{8-\frac{3}{2}} = \dfrac{y-6}{4-6}$; $\dfrac{x-\frac{3}{2}}{\frac{13}{2}} = \dfrac{y-6}{-2}$; $-2x+3 = \dfrac{13}{2}(y-6)$; $-4x+6 = 13y-78$; $13x + 4y - 84 = 0$ (BE).

Для отыскания координат точки M решаем совместно уравнения прямых AD и BE:

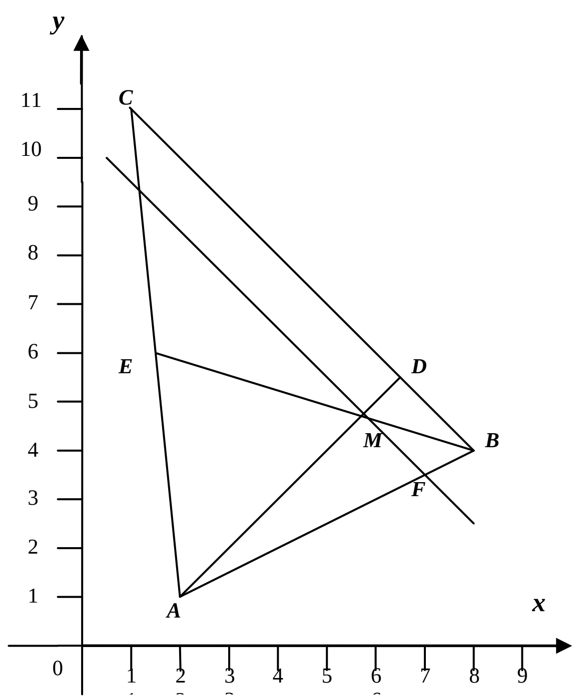


Рисунок 1

$$\begin{cases} x-y-1=0; \\ 4x+13y-84=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{97}{17}; \\ y=\dfrac{80}{17}. \end{cases}$$ Таким образом $M\left(\dfrac{97}{17};\dfrac{80}{17}\right)$.

6. Так как искомая прямая *MF* параллельна прямой *BC*, то $k_{MF}=k_{BC}=-1$. Подставив в уравнение (5) вместо x_0, y_0 координаты точки *M*, а вместо k значение $k_{MF}=-1$, получаем уравнение прямой MF: $y-\dfrac{80}{17}=-1\left(x-\dfrac{97}{17}\right)$; $17y-80=-17x+97$; $17x+17y-177=0$ (MF).

7. Треугольник *ABC*, высота AD, медиана *BE*, прямая MF и точка *M* построены в системе координат *xOy* на рисунке 1.

Задание №4

В задачах 51 – 75 даны координаты вершин пирамиды A, B, C, D. Требуется:

1) записать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ в системе орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и найти модули этих векторов;
2) найти угол между векторами $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$;
3) найти проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{DB}$;
4) найти площадь грани *BCD*;
5) найти объем пирамиды *ABCD*.

76.	*A*(8;2;3),	*B*(6;9;–5),	*C*(4;0;6),	*D*(4;–2;5).
77.	*A*(0;–4;–6),	*B*(10;0;2),	*C*(7;2;0),	*D*(–1;–2;–8).
78.	*A*(0;6;–3),	*B*(–2;13;–11),	*C*(–4;4;0),	*D*(–4;2;–1).
79.	*A*(2;–6;3),	*B*(12;–2;10),	*C*(9;0;8),	*D*(1;–4;0).
80.	*A*(9;3;–6),	*B*(7;10;–14),	*C*(5;1;–3),	*D*(5;–1;–4).
81.	*A*(2;4;–4),	*B*(0;11;–12),	*C*(–2;2;–1),	*D*(–2;0;2).
82.	*A*(–7;1;1),	*B*(3;5;9),	*C*(0;7;7),	*D*(–8;3;–1).
83.	*A*(1;–2;0),	*B*(–1;5;–8),	*C*(–3;–4;3),	*D*(–3;–6;2).
84.	*A*(6;1;–1),	*B*(4;8;–9),	*C*(2;–1;2),	*D*(2;–3;1).
85.	*A*(7;7;–5),	*B*(5;14;–13),	*C*(3;5;–2),	*D*(3;3;–3).
86.	*A*(5;0;–2),	*B*(3;7;–10),	*C*(1;–2;1),	*D*(4;–4;0).
87.	*A*(3;–3;–2),	*B*(13;1;6),	*C*(10;3;4),	*D*(2;–1;–4).
88.	*A*(–1;–5;4),	*B*(9;–1;12),	*C*(6;1;10),	*D*(–2;–3;2).
89.	*A*(4;–1;0),	*B*(14;3;8),	*C*(11;5;6),	*D*(3;1;–2).
90.	*A*(–4;–2;3),	*B*(6;2;11),	*C*(3;4;9),	*D*(–5;0;1).
91.	*A*(–3;3;–3),	*B*(7;7;5),	*C*(4;9;3),	*D*(–4;5;–5).
92.	*A*(3;5;–7),	*B*(1;12;–15),	*C*(–1;3;–4),	*D*(–1;1;–5).
93.	*A*(–2;2;–1),	*B*(8;6;7),	*C*(5;8;5),	*D*(–3;4;–3).
94.	*A*(1;0;–8),	*B*(11;4;0),	*C*(8;6;–2),	*D*(0;2;–10).
95.	*A*(4;8;1),	*B*(2;15;–7),	*C*(0;6;4),	*D*(0;4;3).

96.	$A(1;–2;3)$,	$B(–1;5;–5)$,	$C(–3;–4;6)$,	$D(–3;–6;5)$.
97.	$A(1;–5;3)$,	$B(11;–1;11)$,	$C(8;1;9)$,	$D(0;–3;1)$.
98.	$A(2;6;–53)$,	$B(0;13;–13)$,	$C(–2;4;–2)$,	$D(–2;2;–3)$.
99.	$A(–2;0;6)$,	$B(8;4;14)$,	$C(5;6;12)$,	$D(–3;2;4)$.
100.	$A(0;–1;2)$,	$B(–2;6;–6)$,	$C(–4;–3;5)$,	$D(–4;–5;4)$.

Решение типового примера.

Даны координаты точек $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$.

1. Известно, что произвольный вектор $\vec{a}$ представляется в системе орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ по формуле

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad (6)$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\vec{a}$ в системе координат, порожденной ортами, причем $a_x = np_{Ox}\vec{a}$, $a_y = np_{Oy}\vec{a}$, $a_z = np_{Oz}\vec{a}$.

Если заданы точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то для вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$, то есть

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \qquad (7)$$

Воспользовавшись формулой (7) и координатами заданных точек A, B, C, D, получим:

$$\overrightarrow{AB} = (2-0)\vec{i} + (3-0)\vec{j} + (5-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k};$$

$$\overrightarrow{BD} = (3-2)\vec{i} + (7-3)\vec{j} + (2-5)\vec{k} = \vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k};$$

$$\overrightarrow{CD} = (3-6)\vec{i} + (7-2)\vec{j} + (2-3)\vec{k} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}.$$

Если вектор $\vec{a}$ задан формулой (6), то его модуль вычисляется следующим образом:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (8)$$

Используя формулу (8), получаем модули векторов:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29};$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{26};$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}.$$

2. Известна формула $cos\left(\vec{a}\,^\wedge\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, где $\vec{a}\cdot\vec{b}$ – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которое можно вычислить следующим образом:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

У нас

$$\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{BD}\,^\wedge\,\overrightarrow{DC}\right) = \frac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{DB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|} = \frac{(-1)\cdot 3 + (-4)\cdot(-4) + 3\cdot 1}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}} = \frac{16}{26},$$

то есть $\varphi = \arccos\frac{16}{26}$..

3. Известно, что $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}}$, то есть в нашем случае $np_{\overrightarrow{DB}}\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{DB}\right|}$, где

$\overrightarrow{AD} = (3-0)\vec{i} + (7-0)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}$, тогда

$$np_{\overrightarrow{DB}}\overrightarrow{AD} = \frac{(-1)\cdot 3 + (-4)\cdot 7 + 3\cdot 1}{\sqrt{26}} = -\frac{28}{\sqrt{26}} \approx -5{,}49.$$

4. Воспользуемся формулой нахождения площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,$$

где $\vec{a}\times\vec{b}$ – векторное произведение, которое можно вычислить по следующему правилу:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

В нашем примере $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right|$, причем

$\overrightarrow{CB} = (2-6)\vec{i} + (3-2)\vec{j} + (5-3)\vec{k} = -4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$;

$$\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 10\vec{j} - 13\vec{k}.$$

Таким образом, $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\sqrt{(-9)^2 + (-10)^2 + (-13)^2} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{350} = \frac{5\sqrt{14}}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

5. Объем пирамиды, построенной на трех некомпланарных векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|,$$

где $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ – смешанное произведение векторов, которое вычисляется следующим образом:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

У нас $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$, где

$\overrightarrow{AC} = (6-0)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (3-1)\vec{k} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$;

$\overrightarrow{AD} = (3-0)\vec{i} + (7-0)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}$;

$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 120$, то есть $V = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20$ (куб. ед.).

Задание №5

Даны координаты точек *A*, *B*, *C* и *D*. Требуется:

1) составить канонические уравнения прямой *CB*;
2) составить уравнение плоскости α_1, проходящей через точку *A* перпендикулярно прямой *CB*;
3) найти точку *M* пересечения плоскости α_1 и прямой *CB*;
4) составить уравнение плоскости α_2, проходящей через точки *A*, *B* и *D*;
5) составить параметрические уравнения прямой ℓ, проходящей через точку *C* перпендикулярно плоскости α_2.

101.	*A*(–1;2;–3),	*B*(2;–4;6),	*C*(0;0;2).	*D*(–1;4;12).
102.	*A*(–1;2;–3),	*B*(–2;3;9),	*C*(3;–4;7).	*D*(9;1;2).
103.	*A*(5;–2;1),	*B*(–1;1;1),	*C*(–3;5;–3).	*D*(–4;9;7).
104.	*A*(3;–4;3),	*B*(–6;9;3),	*C*(–1;2;1).	*D*(5;7;–4).
105.	*A*(6;4;0),	*B*(–2;–5;2),	*C*(–4;–1;–2).	*D*(–5;3;8).
106.	*A*(–2;0;–2),	*B*(–1;5;8),	*C*(4;–2;6).	*D*(10;3;1).
107.	*A*(5;–5;5),	*B*(–1;4;–3),	*C*(–3;8;–7).	*D*(–4;12;3).
108.	*A*(0;1;–1),	*B*(–3;4;7),	*C*(2;–3;5).	*D*(8;2;0).
109.	*A*(–3;–1;4),	*B*(7;0;2),	*C*(5;4;–6).	*D*(4;8;4).
110.	*A*(1;–3;2),	*B*(–4;8;4),	*C*(1;1;2).	*D*(7;6;–3).
111.	*A*(–2;0;6),	*B*(6;–1;–4),	*C*(4;3;–8).	*D*(3;7;2).
112.	*A*(3;6;1),	*B*(6;–1;5),	*C*(–1;–8;3).	*D*(5;–3;–2).
113.	*A*(2;–5;3),	*B*(2;4;–1),	*C*(0;8;–5).	*D*(–1;12;5).
114.	*A*(2;6;–3),	*B*(0;6;–5),	*C*(5;0;–6),	*D*(8;2;5).
115.	*A*(4;2;1),	*B*(–2;4;–6),	*C*(7;–1;–8),	*D*(0;–6;1).
116.	*A*(5;0;3),	*B*(–3;–2;–4),	*C*(–1;3;0),	*D*(–4;2;–7).
117.	*A*(3;–2;2),	*B*(5;4;1),	*C*(–5;5;4),	*D*(–1;–2;–2).
118.	*A*(0;4;–4),	*B*(–4;–2;–5),	*C*(9;–2;–10),	*D*(1;8;–5).
119.	*A*(–1;2;–4),	*B*(1;–4;1),	*C*(–9;7;8),	*D*(4;4;0).
120.	*A*(0;–2;–1),	*B*(2;–2;1),	*C*(–3;4;2),	*D*(–3;0;–5).
121.	*A*(5;6;0),	*B*(3;4;–1),	*C*(11;–3;–12),	*D*(2;–4;2).
122.	*A*(1;–2;0),	*B*(3;6;–2),	*C*(–7;6;6),	*D*(0;2;–3).
123.	*A*(–2;0;–4),	*B*(4;6;–1),	*C*(3;1;–4),	*D*(7;2;4).
124.	*A*(2;–5;3),	*B*(–4;–3;–4),	*C*(5;–8;–6),	*D*(–2;–13;3).
125.	*A*(0;1;–2),	*B*(–6;3;–9),	*C*(3;–2;–11),	*D*(–4;–7;–2).

Решение типового примера.

Даны координаты точек $A(2;4;-1)$, $B(3;-1;0)$, $C(0;3;4)$, $D(-1;2;3)$.

1. Известно, что уравнения прямой, проходящей через две заданные точки пространства $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{9}$$

Подставив в (9) координаты точек C и B, получим $\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-3}{-1-3}=\frac{z-4}{0-4}$, то есть уравнения прямой CB окончательно запишутся следующим образом: $\frac{x}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{-4}$.

2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку пространства $M_0(x_0;y_0;z_0)$ с данным нормальным вектором $\vec{n}=(A;B;C)$ (произвольным ненулевым вектором, перпендикулярным плоскости), имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{10}$$

Так как плоскость α_1 проходит перпендикулярно прямой CB, то нормальным вектором плоскости будет $\overrightarrow{CB}=(3;-4;-4)$.

Подставив в (10) координаты точки A и вектора $\overrightarrow{CB}$, получим $3(x-2)+(-4)(y-4)+(-4)(z-(-1))=0$, то есть уравнение плоскости α_1 будет иметь вид: $3x-4y-4z+6=0$.

3. Для отыскания точки K пересечения плоскости α_1 и прямой CB перепишем уравнения прямой в параметрическом виде:

$$x=x_0+lt;\quad y=y_0+mt;\quad z=z_0+nt; \tag{11}$$

где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка на прямой, $\vec{v}=(l;m;n)$ – ее направляющий вектор (произвольный ненулевой вектор, параллельный прямой).

Получим $x=3t;\quad y=3-4t;\quad z=4-4t$.

Далее, решая систему уравнений $\begin{cases} 3x-4y-4z+6=0; \\ x=3t;\quad y=3-4t;\quad z=4-4t; \end{cases}$

будем иметь $K\left(\frac{66}{41};\frac{35}{41};\frac{76}{41}\right)$.

4. Будем искать уравнение плоскости α_2 в виде (2). В качестве вектора нормали $\vec{n}=(A;B;C)$ возьмем вектор $\vec{n}_2=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$, где $\overrightarrow{AB}=(1;-5;1)$, $\overrightarrow{AD}=(-3;-2;4)$. Тогда $\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}=-18\vec{i}-7\vec{j}-17\vec{k}$, или

$\vec{n}_2=(-18;-7;-17)$.

Подставив в (10) координаты вектора $\vec{n}_2$ и, например, точки A, получим $(-18)(x-2)+(-7)(y-4)+(-17)(z-(-1))=0$, а окончательное уравнение плоскости α_2 будет иметь вид: $18x+7y+17z-47=0$.

5. Параметрические уравнения прямой в пространстве имеют вид (11). По условию прямая ℓ проходит через точку C и перпендикулярна плоскости α_2, значит вектор $\vec{n}_2$ параллелен прямой и может служить направляющим вектором.

Подставляя координаты точки C и вектора $\vec{n}_2$ в уравнение (11), получим $x=-18t;\quad y=3-7t;\quad z=4-17t$.

Задание №6

Даны уравнения кривых второго порядка. Найти:

1) для эллипса – полуоси, фокусы;

2) для гиперболы – полуоси, фокусы, уравнения асимптот;

3) для параболы – фокус, параметр.

Построить кривые и отметить на рисунке найденные элементы.

126. $2x^2+3y^2=12$; $\quad y^2=\frac{1}{2}x$.

127. $4x^2-6y^2=24$; $\quad x^2=-4y$.

128. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; $\quad 3y^2=x$.

129. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$; $\quad \frac{1}{2}x^2=-y$.

130. $2x^2-3y^2=-12$; $\quad x^2=\frac{1}{2}y$.

131. $5x^2+25y^2=125$; $\quad y^2=-4x$.

132. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; $\quad 2x^2=y$.

133. $6x^2+4y^2=24$; $\quad y^2=4x$.

134. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; $\quad 3x^2=-y$.

135. $2y^2-3x^2=12$; $\quad y^2=-3x$.

136. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{8}=1$; $\quad 5x^2=y$.

137. $2x^2-4y^2=8$; $\quad x^2=-\frac{1}{2}y$.

138. $4x^2+8y^2=32$; $\quad y^2=3x$.

139. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1;$ $3x^2=y.$

140. $3y^2-6x^2=-18;$ $2y^2=x.$

141. $\frac{x^2}{4}-y^2=1;$ $3y^2=-x.$

142. $4x^2+25y^2=100;$ $x^2=\frac{1}{3}y.$

143. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=1;$ $4y^2=x.$

144. $2y^2-4x^2=16;$ $x^2=-3y.$

145. $4x^2-6y^2=48;$ $y^2=4x.$

146. $x^2-y^2=4;$ $x^2=-\frac{1}{4}y.$

147. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1;$ $-4y^2=x.$

148. $2y^2-4x^2=-16;$ $x^2=5y.$

149. $2x^2+20y^2=50;$ $y^2=-\frac{1}{3}x.$

150. $x^2-y^2=-9;$ $x^2=-5y.$

Решение типового примера.

Даны уравнения гиперболы $4x^2-25y^2=100$ и параболы $y^2=3x$.

1. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{12}$$

где a – действительная полуось, b– мнимая полуось; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокусы, при этом $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Разделим обе части уравнения $4x^2-9y^2=36$ на 36: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Сравнивая это уравнение с (12), находим $a^2=9$, $b^2=4$, отсюда действительная полуось $a=3$, мнимая полуось $b=2$.

Далее найдем $c=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$, поэтому $F_1\left(-\sqrt{13};0\right), F_2\left(\sqrt{13};0\right)$.

Пара прямых $y=\pm\frac{b}{a}x$ называются асимптотами, подставив найденные значения a и b, получим $y=\pm\frac{2}{3}x$.

Отмечаем на осях координат вершины гиперболы, фокусы, асимптоты и производим построение (рисунок 2).

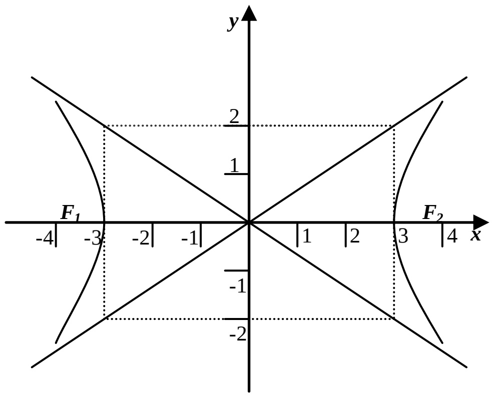


Рисунок 2

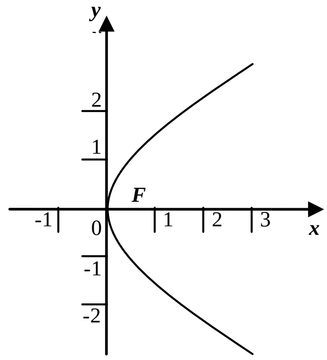


Рисунок 3

2. Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px, \qquad (13)$$

где p – параметр; $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус.

Сравнивая уравнение $y^2 = 3x$ с (13), находим параметр $p = \frac{3}{2}$ и фокус $F\left(\frac{3}{4};0\right)$. Отмечаем на осях координат вершину параболы, фокус и производим построение (рисунок 3).

Задание №7

Заданы векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ в базисе $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$.

1. Показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис.
2. Найти разложение вектора $\bar{d}$ по базису $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

151. $\bar{a} = (1;2;3)$, $\bar{b} = (5;4;-1)$, $\bar{c} = (-2;1;2)$, $\bar{d} = (8;5;0)$.
152. $\bar{a} = (-1;2;1)$, $\bar{b} = (1;3;-2)$, $\bar{c} = (-3;1;0)$, $\bar{d} = (-5;0;-1)$.
153. $\bar{a} = (2;-2;1)$, $\bar{b} = (3;4;-1)$, $\bar{c} = (1;-1;5)$, $\bar{d} = (4;3;-5)$.
154. $\bar{a} = (3;-4;1)$, $\bar{b} = (0;-2;5)$, $\bar{c} = (2;1;2)$, $\bar{d} = (1;6;3)$.
155. $\bar{a} = (1;-1;1)$, $\bar{b} = (2;3;6)$, $\bar{c} = (0;7;2)$, $\bar{d} = (3;-5;5)$.
156. $\bar{a} = (0;2;1)$, $\bar{b} = (3;5;-7)$, $\bar{c} = (10;2;-1)$, $\bar{d} = (20;2;-3)$.
157. $\bar{a} = (-3;4;6)$, $\bar{b} = (9;-1;2)$, $\bar{c} = (-1;0;8)$, $\bar{d} = (7;3;0)$.
158. $\bar{a} = (2;5;-7)$, $\bar{b} = (2;4;-4)$, $\bar{c} = (5;0;11)$, $\bar{d} = (8;-5;29)$.
159. $\bar{a} = (0;-3;2)$, $\bar{b} = (1;8;4)$, $\bar{c} = (3;2;-2)$, $\bar{d} = (-2;3;8)$.
160. $\bar{a} = (-8;1;3)$, $\bar{b} = (1;2;-3)$, $\bar{c} = (6;10;4)$, $\bar{d} = (20;19;5)$.
161. $\bar{a} = (2;7;3)$, $\bar{b} = (-1;0;4)$, $\bar{c} = (12;1;-1)$, $\bar{d} = (-11;6;8)$.
162. $\bar{a} = (5;1;0)$, $\bar{b} = (4;-1;9)$, $\bar{c} = (-6;1;8)$, $\bar{d} = (-17;1;16)$.

163. $\bar{a}=(0;3;2)$, $\bar{b}=(1;4;10)$, $\bar{c}=(-4;1;1)$, $\bar{d}=(5;6;11)$.
164. $\bar{a}=(-3;1;8)$, $\bar{b}=(2;1;-1)$, $\bar{c}=(3;5;5)$, $\bar{d}=(9;9;2)$.
165. $\bar{a}=(4;5;-13)$, $\bar{b}=(2;1;1)$, $\bar{c}=(0;3;-7)$, $\bar{d}=(6;3;-5)$.
166. $\bar{a}=(5;2;1)$, $\bar{b}=(0;3;4)$, $\bar{c}=(-1;3;8)$, $\bar{d}=(-7;4;15)$.
167. $\bar{a}=(-4;1;6)$, $\bar{b}=(5;0;3)$, $\bar{c}=(1;9;-1)$, $\bar{d}=(0;-8;10)$.
168. $\bar{a}=(7;0;3)$, $\bar{b}=(4;2;1)$, $\bar{c}=(-11;3;6)$, $\bar{d}=(-29;6;9)$.
169. $\bar{a}=(-1;-2;-3)$, $\bar{b}=(0;2;7)$, $\bar{c}=(1;-5;6)$, $\bar{d}=(-2;5;-2)$.
170. $\bar{a}=(-3;3;0)$, $\bar{b}=(4;2;9)$, $\bar{c}=(12;0;1)$, $\bar{d}=(27;-3;2)$.
171. $\bar{a}=(3;11;-1)$, $\bar{b}=(7;1;0)$, $\bar{c}=(3;2;2)$, $\bar{d}=(7;10;-3)$.
172. $\bar{a}=(7;3;-1)$, $\bar{b}=(5;0;2)$, $\bar{c}=(10;4;9)$, $\bar{d}=(13;5;19)$.
173. $\bar{a}=(2;-9;3)$, $\bar{b}=(1;3;-6)$, $\bar{c}=(5;2;8)$, $\bar{d}=(-2;-8;-11)$.
174. $\bar{a}=(0;1;-11)$, $\bar{b}=(3;4;4)$, $\bar{c}=(2;7;-2)$, $\bar{d}=(4;13;18)$.
175. $\bar{a}=(9;1;1)$, $\bar{b}=(2;0;7)$, $\bar{c}=(5;6;-3)$, $\bar{d}=(6;-5;11)$.

Решение типового примера

Даны три вектора $\bar{a}=(1;-2;3)$, $\bar{b}=(2;1;-3)$, $\bar{c}=(0;2;-2)$ в базисе $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$. Доказать, что система $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ образует базис в трехмерном пространстве. Найти разложение вектора $\bar{d}=(0;1;3)$ по этому базису.

Для доказательства того, что система $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ образует базис, вычислим определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2(-3-6)-2(1+4)=8.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ образует базис в трехмерном пространстве.

Пусть разложение вектора $\bar{d}$ по этому базису имеет вид

$$\bar{d}=x\cdot\bar{a}+y\cdot\bar{b}+z\cdot\bar{c}.$$

Векторное равенство в координатной форме можно записать

$$x(1;-2;3)+y(2;1;-3)+z(0;2;-2)=(0;1;3)$$

или

$$(x+2y+0z;-2x+y+2z;3x-3y-2z)=(0;1;3).$$

Приравнивая соответствующие координаты, найдем коэффициенты разложения x,y,z из системы

$$\begin{cases}x+2y+0z=0,\\ -2x+y+2z=1,\\ 3x-3y-2z=3.\end{cases}$$

Решая систему методом Крамера, получим:

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{16}{8}=2$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-8}{8}=-1$, $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{24}{8}=3$.

Ответ: $\bar{d}=2\cdot\bar{a}+(-1)\cdot\bar{b}+3\cdot\bar{c}$.

Задание №8

Найти указанные пределы.

176. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+5}{4x^2+5x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arctg\,2x}{sin^2\,3x}$.

177. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-4x-12}{2+3x-2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2+7}{4x-2x^2+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin^2\,x}{xtg\,2x}$.

178. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+5x+1}{3x^2+7x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{4x^2-3x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2\,4x}{2x\cdot arctg\,2x}$.

179. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-2x-16}{x^2-3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3x^2+5}{4x^2-5x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arctg\,4x}$.

180. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-7x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-4x-x^2}{4x^2+5x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,5x}{arctg\,2x}$.

181. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-9}{5x^3+4x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,sin\,5x}{arctg^2\,2x}$.

182. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2-2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+5x-7}{2x^2+3x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2\,x}{xtg\,2x}$.

183. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{2x^2+7x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2-6}{2x^2+7x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,3x}{tg\,2x}$.

184. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{2x^2-15x+25}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x-2}{3x^2-x^3+7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{sin\,2x}$.

185. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-7x+2}{4-5x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2\,4x}{xarctg\,2x}$.

186. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{4-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg\,5x}{arcsin^2\,3x}$.

187. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+4}{2x^2+7x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,3x}{tg\,2x}$.

188. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x-5x^2}{7x^3+3x^2-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2\,x}{xarctg\,4x}$.

189. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3+2x-x^2}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-7x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,x\cdot arcsin\,2x}{arctg^2\,3x}$.

190. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{9x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg\,2x}{arctg^2\,2x}$.

191. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-9}{3x^2+7x-11}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x}{arcsin^2 3x}$.

192. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{3x^2-10x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-4x-7x^2}{3x^2+2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin 4x}{arcsin 5x}$.

193. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x+4}{8-2x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-12}{11-7x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x sin 3x}{arctg^2 2x}$.

194. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-4x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x+20}{2x^2+8x-11}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin^2 3x}{x tg 2x}$.

195. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{3x^2+13x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+7x+13}{12-3x-2x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2tg 4x}{arcsin 3x}$.

196. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{2x^2-4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+6}{2x^2+8x-27}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x tg 5x}{arcsin^2 3x}$.

197. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x+6}{x^2+7x-27}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x cos 2x}{arcsin^2 2x}$.

198. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{3x^2+5x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin 3x}{x cos 6x}$.

199. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-6x-20}{3x^2-14x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+6x+7}{2x^2-4x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x sin 3x}{arctg^2 3x}$.

200. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{8+2x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+10}{2x^2+4x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin^2 6x}{x cos 2x}$.

Решение типового примера.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2+x-1}=\dfrac{2^2-6\cdot 2+5}{2\cdot 2^2+2-1}=-\dfrac{3}{9}=-\dfrac{1}{3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\dfrac{2\cdot 3^2-3\cdot 3-9}{3^2-3-6}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

При подстановке вместо переменной ***x*** её предельного значения 3 получается неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для избавления от этого типа неопределённости воспользуемся правилом Лопиталя: предел отношения функций равен пределу отношения их производных.

$$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(2x^2-3x-9\right)'}{\left(x^2-x-6\right)'}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x-3}{2x-1}=\frac{4\cdot 3-3}{2\cdot 3-1}=\frac{9}{5}.$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ в алгебраической дроби достаточно найти предел отношения старших степеней:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{tg^2 4x}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

В данном случае для освобождения от неопределённости воспользуемся следующей известной теоремой: при вычислении пределов в произведении и частном можно заменять бесконечно малые на эквивалентные.

Решение примера будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{tg^2 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2x}{(4x)^2}=\frac{1}{8}.$$

Здесь было учтено, что $\sin 2x \sim 2x$, $tg^2 4x \sim (4x)^2$ при $x\to 0$.

Задание №9

В задачах найти производные, пользуясь правилами и формулами дифференцирования.

201. а) $y=\left(3-2\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{5}{x^3}\right)^3$ б) $y=\dfrac{2x+3\sin x}{\sqrt{4+2x^2}}$

в) $x^2+y^2-2y=0$ г) $\begin{cases} x=t-\ln t, \\ y=3t^2-2t^3. \end{cases}$

202. а) $y=\left(2x-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4x^4\right)^2$ б) $y=\dfrac{arctg\,3x}{2+7x^3}$

в) $e^x-x-y^3=0$ г) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

203. а) $y=\left(3-\dfrac{2}{x}+5\sqrt[3]{x}\right)^3$ б) $y=\dfrac{\sqrt{7x^3+2}}{2\sin x-13}$

в) $e^x-x^2-e^y=0$ г) $\begin{cases} x=2t-\sin 2t, \\ y=8\cos 3t. \end{cases}$

204. а) $y=\left(4\sqrt{x^5}+\dfrac{2}{x^3}-7\right)^4$ б) $y=\dfrac{arctg\,12x}{13x^2+5}$

в) $2x+y^2-\sin 2x=0$ г) $\begin{cases} x=3\cos 6t+3t, \\ y=3tg5x. \end{cases}$

205. а) $y=\left(5\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{4}{x^2}+2\right)^5$ б) $y=5^{\cos 4x}\cdot tg2x$

в) $x\ln x+e^{y}-2=0$

г) $\begin{cases} x=t^{2}-\ln t, \\ y=3t+2t^{3}. \end{cases}$

206. а) $y=\left(6-7\sqrt[5]{x^{2}}+\dfrac{2}{x^{4}}\right)^{10}$

б) $y=4^{tg\,2x}\cdot\sin 2x$

в) $x^{2}+y^{2}-2\cos y=0$

г) $\begin{cases} x=t^{3}-\cos 4t, \\ y=6t^{2}-7t. \end{cases}$

207. а) $y=\left(2x^{3}-3\sqrt{x^{5}}+\dfrac{7}{x^{2}}\right)^{11}$

б) $y=\dfrac{\arccos 2x}{2x^{5}-13}$

в) $x^{3}+y^{2}-2\sin 3x=0$

г) $\begin{cases} x=3t^{2}+\sin 5x, \\ y=2t^{3}. \end{cases}$

208. а) $y=\left(5+7\sqrt{x^{3}}+\dfrac{2}{x}\right)^{2}$

б) $y=7^{\arccos 2x}\cdot\sin 4x$

в) $\cos 3x+y^{3}-2=0$

г) $\begin{cases} x=2t-t^{4}, \\ y=\cos(5t+4). \end{cases}$

209. а) $y=\left(7+5\sqrt[7]{x^{2}}-\dfrac{3}{x}\right)^{4}$

б) $y=e^{tg\,2x}\cdot\cos 2x$

в) $\ln x^{2}+3y^{2}-5y=0$

г) $\begin{cases} x=2t-\cos 3t, \\ y=9t^{2}+2\cos 4x. \end{cases}$

210. а) $y=\left(3+2\sqrt[3]{x^{2}}+\dfrac{7}{x^{4}}\right)^{7}$

б) $y=\dfrac{2x^{2}+3}{\arcsin 3x}$

в) $x\cos 2x+y^{2}-4=0$

г) $\begin{cases} x=t^{4}-tg\,3t, \\ y=3t^{2}+2\sin t. \end{cases}$

211. а) $y=\left(5-10\sqrt[4]{x^{3}}-\dfrac{7}{x}\right)^{5}$

б) $y=4^{2\arccos 2x}\cdot\sin 5x$

в) $x^{3}+y^{2}\cos 5x-2=0$

г) $\begin{cases} x=\sin^{2}4t, \\ y=3t^{2}-2t. \end{cases}$

212. а) $y=\left(4-7\sqrt[7]{x^{3}}+\dfrac{2}{x^{5}}\right)^{3}$

б) $y=e^{ctg\,4x}\cdot\cos 14x$

в) $x^{3}y+y^{2}-2x=0$

г) $\begin{cases} x=3t^{4}+\sin 4t^{2}, \\ y=3t^{2}. \end{cases}$

213. а) $y=\left(12+2\sqrt{x^{7}}-\dfrac{6}{x^{4}}\right)^{4}$

б) $y=7^{arctg\,2x}\cdot ctg\,5x$

в) $x\cos y + y^5 - 4x^2 = 0$

г) $\begin{cases} x = \sin(4t+5), \\ y = tg6t^2. \end{cases}$

214. а) $y = \left(17x - 3\sqrt[5]{x^3} - \dfrac{3}{x^3}\right)^5$

б) $y = \dfrac{3x^7 - 2}{\arccos 2x}$

в) $x + y^4 5(x^2 - 2) = 0$

г) $\begin{cases} x = \sin 4t^3, \\ y = \cos(3t^2 - 2t). \end{cases}$

215. а) $y = \left(2x^4 - 3\sqrt[4]{x^3} + \dfrac{7}{x}\right)^2$

б) $y = \dfrac{\sqrt{5x^4 - 2}}{\cos 2x + 7x^4}$

в) $7x^5 y + y^4 - 6 = 0$

г) $\begin{cases} x = e^{6t} - 4t^3, \\ y = tg(t^2 - t). \end{cases}$

216. а) $y = \left(13x + 11\sqrt[5]{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right)^4$

б) $y = \dfrac{tg2x + 7\cos x}{2x^4 + 7}$

в) $x^2 + \sin y^4 - 5 = 0$

г) $\begin{cases} x = 4t^3 + 8t, \\ y = \ln 3t^2 - 2t. \end{cases}$

217. а) $y = \left(5 - 13\sqrt[4]{x^3} - \dfrac{2}{x^3}\right)^5$

б) $y = 3^{tg2x} \cdot \cos 5x$

в) $x^7 + y^2 \ln 4x + 9 = 0$

г) $\begin{cases} x = tg(4t + t^2), \\ y = 3t^2 - 8t. \end{cases}$

218. а) $y = \left(-17x^2 + 2\sqrt{x^3} + \dfrac{12}{x^2}\right)^8$

б) $y = e^{tg6x} \cdot \sin 5x$

в) $5x^3 \ln 3y + y^2 + 4 = 0$

г) $\begin{cases} x = 4t + 5^t, \\ y = \arccos 4t^3. \end{cases}$

219. а) $y = \left(17\sqrt{x^3} - \dfrac{3}{x^5} + 2x^2\right)^{12}$

б) $y = 7^{\arcsin 6x} \cdot tg5x$

в) $\cos x + \ln 4y^2 + 9 = 0$

г) $\begin{cases} x = 4t + t^2, \\ y = e^{6t} + 8t. \end{cases}$

220. а) $y = \left(13x - 3\sqrt[4]{x^3} + \dfrac{7}{x^3}\right)^3$

б) $y = \dfrac{5arctg2x}{\sqrt{5x^2 + 7}}$

в) $x^6 + y^2(x+3) + 9y = 0$

г) $\begin{cases} x = \ln(2 + t^2), \\ y = \sin 6t. \end{cases}$

221. а) $y = \left(3x - 12\sqrt[4]{x^3} + \dfrac{3}{x^3}\right)^6$

б) $y = \dfrac{ctgx - 6\cos 2x}{3x^2 - 7}$

в) $x^5(y+1)+y^6+9y=0$ г) $\begin{cases} x=2t^7+t^2, \\ y=e^{t+t^2}. \end{cases}$

222. а) $y=\left(3x-11\sqrt[5]{x}+\dfrac{4}{x^4}\right)^5$ б) $y=\dfrac{\arcsin 4x}{\sqrt{7+2x^2}}$

в) $3x^5+y^6x+7=0$ г) $\begin{cases} x=\ln t^2, \\ y=e^{t+3}+t^4. \end{cases}$

223. а) $y=\left(8x^3+2\sqrt[3]{x^5}+\dfrac{15}{x^8}\right)^8$ б) $y=\dfrac{\sqrt{3x^2+5}}{\arccos 4x}$

в) $y\ln x^4+y^7+9=0$ г) $\begin{cases} x=(t^7+1)^2, \\ y=\sin(3t+1). \end{cases}$

224. а) $y=\left(21x^2+15\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{5}{x^6}\right)^{11}$ б) $y=\dfrac{5\sin 3x+tgx}{9x^2-8x}$

в) $\ln(y+1)+y^6x+9x^2=0$ г) $\begin{cases} x=2t+\cos t^2, \\ y=8^{t+t^2}. \end{cases}$

225. а) $y=\left(14x^2-3\sqrt[3]{x}-\dfrac{6}{x^5}\right)^5$ б) $y=\dfrac{5arctg 3x}{\sqrt{15x^2-6}}$

в) $x^5e^y+7y+9x=0$ г) $\begin{cases} x=\cos 4t^6+t^2, \\ y=4^{2t^2}. \end{cases}$

Решение типового примера.

При решении всех последующих примеров кроме таблицы производных будут использованы известные правила дифференцирования суммы, разности, произведения, дроби и теорема о производной сложной функции:

а) $\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]' = f(x)\pm\varphi(x)$;

б) $\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]' = f'(x)\cdot\varphi(x)+f(x)\cdot\varphi'(x)$

в) $\left[\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$

г) если задана сложная функция $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, то есть $y=f(\varphi(x))$, и каждая из функций $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ дифференцируема по своему аргументу, то $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

1) $y=\left(2x^5-3\sqrt{x^3}-7\right)^6=u^6$, где $u=2x^5-3\sqrt{x^3}-7$;

$$\frac{dy}{dx}=6u^5\frac{du}{dx}=6\left(2x^5-3\sqrt{x^3}-7\right)^5\left(2x^5-3\sqrt{x^3}-7\right)'=6\left(2x^5-3\sqrt{x^3}-7\right)^5\left(10x-\frac{9}{2}\sqrt{x}\right)$$

2) $y=\dfrac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}$;

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cos 7x)'\sqrt{1-3x^4}-\cos 7x\left(\sqrt{1-3x^4}\right)'}{\left(\sqrt{1-3x^4}\right)^2}=\frac{-7\sin 7x\cdot\sqrt{1-3x^4}-\cos 7x\cdot\dfrac{\left(1-3x^4\right)'}{2\sqrt{1-3x^4}}}{1-3x^4}=$$

$$=\frac{-7\sin 7x\cdot\sqrt{1-3x^4}-\dfrac{\cos 7x\cdot\left(-12x^3\right)}{2\sqrt{1-3x^4}}}{1-3x^4}=\frac{-7\cdot\left(1-3x^4\right)\sin 7x+6x^3\cos 7x}{\left(1-3x^4\right)\cdot\sqrt{1-3x^4}}$$

3) $y=3^{tgx}\cdot\sin 5x$

$$\frac{dy}{dx}=\left(3^{tgx}\right)'\cdot\sin 5x+3^{tgx}\cdot(\sin 5x)'=3^{tgx}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin 5x+5\cdot 3^{tgx}\cdot\cos 5x$$

4) $3x-\cos 4x-y^2=0$.

$$3+4\sin 4x-2yy'=0;\quad 3+4\sin 4x=2yy';\quad y'=\frac{3+4\sin 4x}{2y}.$$

5) $\begin{cases}x=t^2+\ln t,\\ y=2t^3+3t\end{cases}$.

$$\frac{dx}{dt}=2t+\frac{1}{t}=\frac{2t^2+1}{t};\ \frac{dy}{dt}=6t^2+3;\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\left(6t^2+3\right)\cdot t}{\left(2t^2+1\right)}.$$

Задание №10

Исследовать данные функции методами дифференциального исчисления, построить их графики. Исследование функций и построение графиков рекомендуется проводить по схеме:

1) найти область определения функции $D(y)$;
2) исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в точках разрыва;
3) определить интервалы ее монотонности и найти точки экстремума функции;
4) найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика;
5) найти асимптоты графика функции;
6) построить график, используя результаты предыдущих исследований.

226. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$. 227. $y=-\dfrac{8x}{x^2+4}$.

228. $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.

229. $y=\frac{4x^2}{3+x^2}$.

230. $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$.

231. $y=\frac{2}{x^2+2x}$.

232. $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

233. $y=-\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$.

234. $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$.

235. $y=\frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$.

236 $y=\frac{1}{x^4-1}$.

237. $y=\frac{12x}{9+x^2}$.

238. $y=\frac{1}{1-x^2}$.

239. $y=\frac{4-x^3}{x^2}$.

240. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

241. $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$.

242. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

243. $y=\frac{2x^3+1}{x^2}$.

244. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

245. $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$.

246. $y=\frac{x^3}{4-x^2}$.

247. $y=\frac{x^3-4}{x^2}$.

248. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

249. $y=\frac{3x-2}{x^2}$.

250. $y=\frac{x}{x^2-4}$.

Решение типового примера.

$$y=\frac{x^2+20}{x-4}.$$

1) Область определения: $D(y)=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$.

2) Исследование на непрерывность и классификация точек разрыва.

Заданная функция непрерывна всюду, кроме точки $x=4$. Вычислим её односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}\frac{x^2+20}{x-4}=-\infty;\ \lim_{x\to 4+0} f(x)=\lim_{x\to 4+0}\frac{x^2+20}{x-4}=+\infty.$$

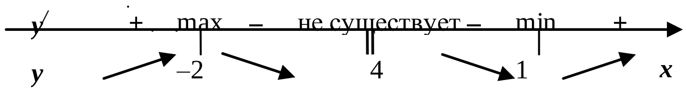
Таким образом, точка $x=4$ является для заданной функции точкой разрыва второго рода, а прямая $x=4$ – вертикальной асимптотой графика.

3) Исследование на экстремум и промежутки монотонности. С этой целью найдем ее производную и приравняем к нулю:

$$y' = \frac{2x(x-4)-\left(x^2+20\right)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2};$$

$$\frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2} = 0; \quad x^2-8x-20=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, делаем вывод о том, что функция имеет две критические точки 1 рода $x_1=-2$, $x_2=10$. Разбиваем область определения этими точками на части и по изменению знака производной в них выявляем промежутки монотонности и наличие экстремума:



$y_{\max} = y(-2) = -4$; $y_{\min} = y(10) = 20$.

4) Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости. Для этого найдем вторую производную заданной функции и приравняем ее к нулю:

$$y'' = \frac{(2x-8)(x-4)^2-2(x-4)\left(x^2-8x-20\right)}{(x-4)^4} = \frac{2(x-4)\left((x-4)^2-\left(x^2-8x-20\right)\right)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{36}{(x-4)^3}.$$

Так как $y'' \neq 0$, то график заданной функции точек перегиба не имеет. Остаётся выяснить вопрос об интервалах его выпуклости и вогнутости:

5) Исследование графика на наличие наклонных асимптот $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+20}{x^2-4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{20}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+20}{x-4}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x+20}{x-4} = 4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ – наклонная асимптота графика.

6) Построение графика. Очевидно, график заданной функции пересекает ось Oy в точке $(0;-5)$ и на основе обобщения результатов всех предыдущих исследований имеет вид, представленный на рисунке 4.

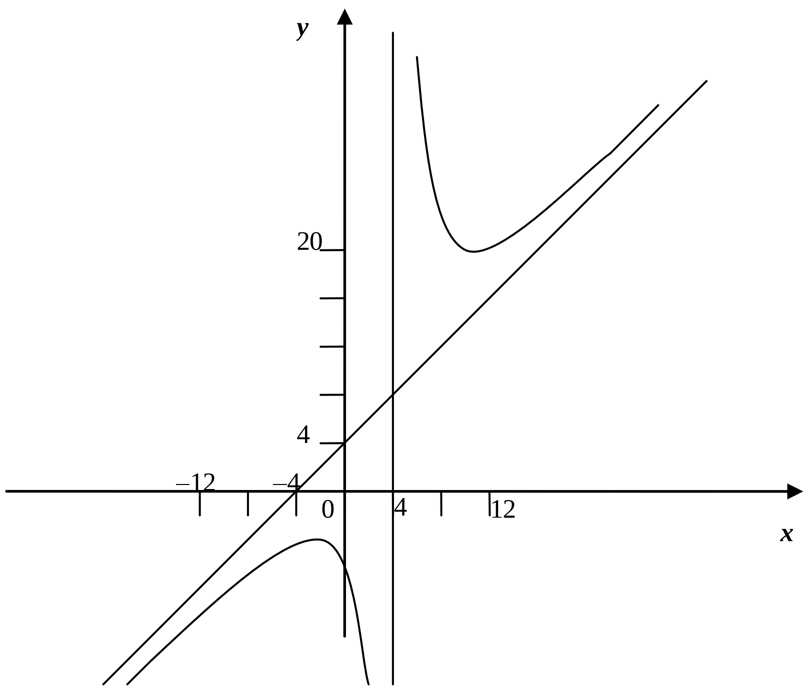


Рисунок 4

Задание №11

Производитель реализует свою продукцию по цене **P**_за единицу, а издержки при этом задаются кубической зависимостью $S(x)=ax+\lambda x^3$ (где x – объём выпускаемой продукции). Найти оптимальный для производителя объём выпуска продукции и соответствующую ему прибыль.

№	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263
P	2	3	4	7	27	3	5	10	11	13	15	21	22
a	1	0	1	1	3	1	1	9	2	1	3	9	10
λ	1/3	1	1	2	2	2/3	1/3	3	3	1	1	1	1

№	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275
P	20	6	16	16	15	14	20	5	10	13	9	28
a	8	3	4	7	3	5	11	2	1	4	1	4
λ	1	1	1	3	2	3	3	1	3	1	2/3	2

Решение типового примера

Производитель реализует свою продукцию по цене 10 р. за единицу, а издержки при этом задаются кубической зависимостью $S(x)=x+3x^3$ (где x – объём выпускаемой продукции). Найти оптимальный для производителя объём выпуска продукции и соответствующую ему прибыль.

Решение.

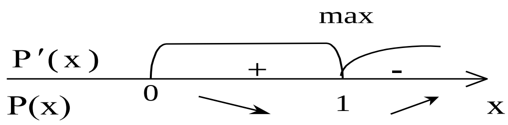
Доход от реализуемой продукции 10x, тогда функция прибыли

$$P(x)=10x-(x+3x^3),\quad P(x)=9x-3x^3$$

Находим критические точки:

$$P'(x)=9-9x^2,\quad 9-9x^2=0,\quad x=\pm 1.$$

По смыслу задачи x>0, поэтому точку x=-1 не рассматриваем.



При x=1 прибыль P(x) максимальна.

Максимальный размер прибыли $P_{max}(1)=9-3=6$

Задание №12

Найти неопределенные интегралы:

276. а) $\int \sqrt[5]{1-7x}\,dx$; б) $\int x\sin\left(3x^2+1\right)dx$.

277. а) $\int \frac{3x-2}{6x^2-1}dx$; б) $\int 5^{3x-2}dx$.

278. а) $\int 2ctg5x\,dx$; б) $\int x\sqrt{1+2x^2}\,dx$.

279. а) $\int \frac{5}{(3x-1)^2}dx$; б) $\int \sin x\,2^{1-\cos x}dx$.

280. а) $\int \left(3x^3+1\right)^2 dx$; б) $\int \frac{x}{\cos^2\left(x^2\right)}dx$.

281. а) $\int \frac{e^x}{3-2e^x}dx$; б) $\int \left(x+5^{2x}\right)dx$.

282. а) $\int x3^{1+x^2}dx$; б) $\int \frac{6x^3-1}{5x^4}dx$.

283. а) $\int \frac{x}{sin^2\left(3x^2-1\right)}dx$; б) $\int \frac{4}{\sqrt[5]{8-7x}}dx$.

284. а) $\int \frac{3x-4}{2+5x^2}dx$; б) $\int \frac{1}{\cos 5x}dx$.

285. а) $\int \left(7x-2sin5x\right)dx$; б) $\int \frac{8}{(1+2x)^3}dx$.

286. а) $\int \frac{9x-8}{\sqrt{x^2+7}}dx$; б) $\int \frac{3x}{\sin\left(x^2+1\right)}dx$.

287. а) $\int \frac{x^4}{2x^5-5}dx$; б) $\int \frac{1}{\mathrm{x}\sqrt{\ln 5\mathrm{x}+5}}\mathrm{dx}$.

288. а) $\int \frac{arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; б) $\int \frac{4\mathrm{x}}{3-2\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$.

289. а) $\int x\sqrt[5]{1-4x^2}dx$; б) $\int \frac{5\sin 3\mathrm{x}}{\sqrt{\cos 3\mathrm{x}-2}}\mathrm{dx}$.

290. а) $\int \frac{ln^3 x}{x}dx$; б) $\int 2\cos(2\mathrm{x}+3)\mathrm{dx}$.

291. а) $\int \sqrt[3]{x^3-1}\cdot x^2dx$; б) $\int \sin \mathrm{x}3^{1-\cos\mathrm{x}}\mathrm{dx}$.

292. а) $\int \frac{3x}{\left(1-3x^2\right)^2}dx$; б) $\int \frac{6\mathrm{x}}{\sin^2\left(2\mathrm{x}^2+2\right)}\mathrm{dx}$.

293. а) $\int \left(2x+e^{2x}\right)dx$; б) $\int \frac{2\mathrm{x}^5-3}{4\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$.

294. а) $\int \frac{cos\,3x}{2+sin\,3x}dx$; б) $\int \frac{10}{\sqrt{5\mathrm{x}+2}}\mathrm{dx}$.

295. а) $\int e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}dx$; б) $\int \frac{2\mathrm{x}^2}{\left(4-3\mathrm{x}^3\right)^2}\mathrm{dx}$.

296. а) $\int \frac{2+3x}{6x^2-5}dx$; б) $\int \frac{3^{\frac{1}{\mathrm{x}}+2}}{\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$.

297. а) $\int \frac{\sqrt{ln\,x}+1}{x}dx$; б) $\int \frac{13}{(2-5\mathrm{x})^6}\mathrm{dx}$.

298. а) $\int \frac{5}{(2+12x)^3}dx$; б) $\int \frac{3\mathrm{x}-1}{2\mathrm{x}^2-5}\mathrm{dx}$.

299. а) $\int 4xtg\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx$; б) $\int \frac{4}{\mathrm{x}\sqrt{\ln \mathrm{x}+5}}\mathrm{dx}$.

300. а) $\int \frac{\sin 8x}{\sqrt{\cos 8x++10}}dx$; б) $\int \left(\mathrm{x}^2-4\right)(1+3\mathrm{x})\mathrm{dx}$.

Решение типового примера:

1. Найти неопределенный интеграл $\int(\ln x)^8\frac{dx}{x}$

Решение. Применим подстановку t=ln x. Тогда $dt=\frac{dx}{x}$.

$$\int(\ln x)^8\frac{dx}{x}=\int t^8dt=\frac{1}{9}t^9+C=\frac{1}{9}(\ln x)^9+C.$$

2. Найти неопределенный интеграл $\int e^{2x^3+3}x^2dx$.

Решение. Применим подстановку $t=2x^3+3$, тогда $dt=6x^2dx$; $\frac{1}{6}dt=x^2dx$, поэтому

$$\int e^{2x^3+3}x^2dx.=\int e^t\frac{1}{6}dt=\frac{1}{6}e^t+C=\frac{1}{6}e^{2x^2+3}+C.$$

Задание №13

Используя формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле, найти интегралы:

301. $\int(1-x)ln\,2xdx$.
302. $\int(1-3x)e^{5x}dx$.
303. $\int arctg\,2xdx$.
304. $\int\frac{ln\,x}{x^3}dx$.
305. $\int\frac{ln\,2x}{\sqrt{x}}dx$.
306. $\int arctg\frac{x}{2}dx$.
307. $\int 5x\,cos(2x-4)dx$.
308. $\int\frac{x}{3}sin(x-2)dx$.
309. $\int(6x+1)e^{\frac{2x}{3}}dx$.
310. $\int arcsin\,2xdx$.
311. $\int 2xe^{-3x}dx$.
312. $\int(2-7x)5^{4x-25}dx$.
313. $\int ln\left(x^2-4\right)\,dx$.
314. $\int\left(x^2+4x\right)ln\,xdx$.
315. $\int arcsin\,7xdx$.
316. $\int\frac{ln\,2x-3}{\sqrt{x}}dx$.
317. $\int(3x-5)e^{\frac{x}{5}}dx$.
318. $\int xarctg\,4xdx$.
319. $\int(1-3x)sin\,3xdx$.
320. $\int(4x+9)cos\,2xdx$.
321. $\int\sqrt{x}\,ln\,xdx$.
322. $\int\left(x^2+2\right)ln\,xdx$.
323. $\int 3xe^{5x}dx$.
324. $\int\frac{ln\,x+5}{x^3}dx$.
325. $\int ln\sqrt{x}dx$.

Решение типовых примеров.

Найти интеграл $\int(2\mathrm{x}+8)\cos 7\mathrm{x}d\mathrm{x}$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int u d\upsilon=u\upsilon-\int\upsilon du$$

Положим u=2x+8, $d\upsilon=\cos 7x$. Тогда du=2dx, $\upsilon=\int\cos 7xdx=\frac{1}{7}\sin 7x$.

Следовательно,

$$\int (2x+8)\cos 7x dx = \frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x - \frac{2}{7}\int \sin 7x dx = \frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x +$$

$$+\frac{2}{49}\cos 7x + C.$$

Задание №14

Найти неопределённые интегралы

326. $\int \frac{7x-2}{(x+1)(x+2)^2}dx$

327. $\int \frac{x-3x^2}{(x-1)(x^2+2)}dx$

328. $\int \frac{1-3x}{(x+2)(x-1)^2}dx$

329. $\int \frac{x^2-5}{(x+1)(x-3)(x+2)}dx$

330. $\int \frac{x-4}{x^4+x^2}dx$

331 $\int \frac{7x-2}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx$

332. $\int \frac{3x+4}{(x-1)(x-2)^2}dx$

333. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+3)}dx$

334. $\int \frac{3x+2}{(x+3)^2(x-5)}dx$

335. $\int \frac{3x+5}{x^4+2x^2}dx$

336. $\int \frac{3x^2-3x+1}{(x+2)(x-1)(x+4)}dx$

337. $\int \frac{7x-5}{(x+1)(x-4)}dx$

338. $\int \frac{x^2}{(x+3)^2(x-2)}dx$

339. $\int \frac{2x-2}{(x+2)(x+3)(x+4)}dx$

340. $\int \frac{3x^2+2}{(x+1)(x-2)^2}dx$

341. $\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-5)}dx$

342. $\int \frac{1-8x}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$

343. $\int \frac{x-9}{(x+2)(x+3)^2}dx$

344. $\int \frac{2}{(x+1)(x+3)^2}dx$

345. $\int \frac{x}{(x-2)(x-3)^2}dx$

346. $\int \frac{2x-7}{(x+3)(x+1)^2}dx$

347. $\int \frac{x-6}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx$

348. $\int \frac{3x}{(x+2)(x-3)^2}dx$

349. $\int \frac{x^2+5}{(x+1)(x+3)(x+2)}dx$

350. $\int \frac{x-1}{(x+1)(x+3)^2}dx$

Решение типового примера

1. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$

Решение. Разложим подынтегральную дробь на элементарные дроби

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя: $x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + B; \quad A = -B \\ x^1 & 1 = -B + C; \\ x^0 & 0 = A - C; \quad A = C. \end{array}$$

Отсюда $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}arctgx + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

Задание №15

Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией $Z(t) = -at^2 + bt + c$ (ден. ед./ч), где t – время в часах от начала работы, $0 \le t \le 8$. Найти функцию u=u(t), выражающую объем продукции (в стоимостном выражении) и его величину за рабочий день.

№ вар	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361
а	0,5	0,4	0,5	0,05	0,3	0,07	0,06	0,04	0,03	0,21	0,02
в	4	3,2	4	0,4	2,4	0,56	0,48	0,32	0,24	0,68	0,16
с	0,5	0,6	0,7	0,5	0,5	1	04	0,5	0,6	0,7	0,5

№ вар	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375
а	0,05	0,025	0,013	0,017	0,2	0,22	0,012	0,12	0,07	0,062	0,04	0,4	0,08	0,022
в	0,4	0,2	0,104	0,136	1,6	1,76	0,096	0,96	0,56	0,496	0,32	2,6	0,6	0,1
с	0,5	0,6	0,7	0,5	0,6	0,7	0,5	0,6	0,7	0,5	0,4	0,5	1	0,4

Решение типового примера

Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией

$z(t) = -0{,}06t^2 + 0{,}4t + 0{,}5$ (ден. ед/ч.), где t – время в часах от начала работы, $0 \le t \le 8$. Найти функцию u = u(t), выражающую объем продукции (в стоимостном выражении) и его величину за рабочий день.

Решение.

Если z(t) – производительность труда, то объём выпускаемой продукции за промежуток [0;t] $u(t) = \int_0^t z(t)dt$.

В нашем примере $u(t) = \int_0^t \left(-0{,}06t^2 + 0{,}4t + 0{,}5\right)dt = -0{,}02t^3 + 0{,}2t^2 + 0{,}5t$.

$u(8) = -0{,}02 \cdot 8^3 + 0{,}2 \cdot 8^2 + 0{,}5 \cdot 8 = 6{,}56$ (ден.ед).

Задание №16

Вычислить площади областей, ограниченных графиками заданных функций.

376. $y = 32 - x^2$, $y = -4x$

377. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 16$

378. $y = x^2 - 4$, $y = 3x - 6$

379. $y = x^2 - 3x + 4$, $y = x + 4$

380. $y = x^2 - 2x + 6$, $y = 2x + 6$

381. $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$

382. $y = x^2 - 4x + 5$, $y = x + 5$

383. $y = 8x - x^2 - 7$, $y = x + 3$

384. $y = \frac{4}{x^2}$, $y = -2 - 2x$, $x = -1$

385. $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{5 - x}{2}$

386. $y = x^2 + 2x + 2$, $y = \sqrt{x + 1} + 1$

387. $y = -x^2 + 6x - 5$, $y = (x - 5)^2$

388. $y = 4x - x^2$, $y = 4$, $x = 0$

389. $x = 5 - y^2$, $x = -4y$

390. $x = 27 - y^2$, $x = -6y$

391. $y = \frac{2}{x}$, $y = -x + 3$

392. $y = -\frac{2}{x}$, $y = x - 3$

393. $y = -\frac{5}{x}$, $y = x - 6$

394. $x = 2y$, $x = 2$

395. $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$, $y = 10 - x$

396. $y = 2 + 4x - x^2$, $y = x^2 - 2x + 2$

397. $y = \frac{x^2}{2} + x + 2$, $y = -x$, $x = 0$

398. $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 2 - 4x - x^2$

399. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 2$

400. $y = -4(x + 2)$, $y = (x + 1)^2$, $y = 0$

Решение типового примера.

Площадь плоской фигуры (рис. 5), ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = g(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляются по формуле:

$$S_{ABCD} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx. \qquad (14).$$

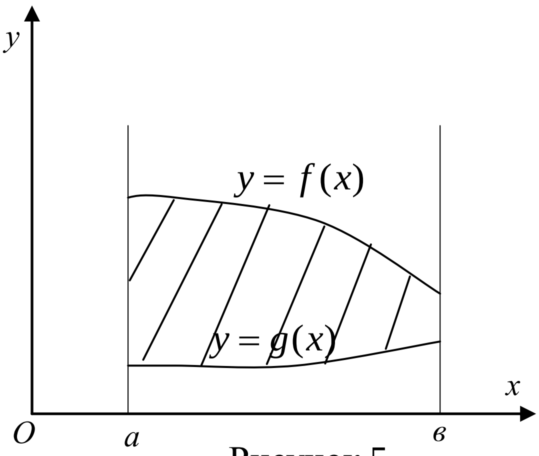


Рисунок 5

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = -x^2 + 2x + 3$.

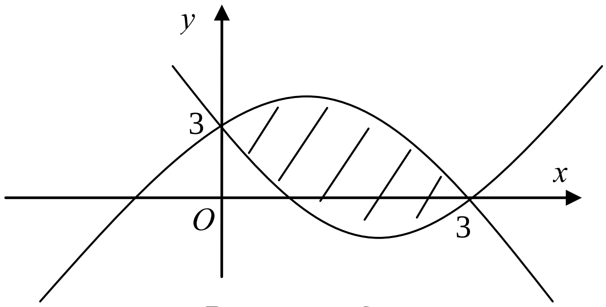


Рисунок 6

Решение. В данном случае графики функций $f(x) = x^2 - 4x + 3$ и $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ – параболы.

Изобразим графики этих функций на рисунке 6. Затем найдем абсциссы a и $в$ точек пересечения графиков функций. Для этого решаем уравнение

$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3$, $2x^2 - 6x = 0$, $2x(x-3) = 0$, $x_1 = 0 = a$ и $x_2 = 3 = b$.

Применяя теперь формулу (14), найдём значение искомой площади:

$$S = \int_0^3 \left[-x^2 + 2x + 3 - x^2 + 4x - 3\right]dx = \int_0^3 \left(-2x^2 + 6x\right)dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 3x^2\right)\Bigg|_0^3 = -18 + 27 = 9.$$

Ответ. $S = 9$.

Задание №17

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций относительно указанной оси.

401. $y = x^2$, $y = x + 2$, ось Ox

402. $y = \frac{2}{x}$, $y = -x + 3$, ось Oy

403. $y = 2 - 2x^2$, $y = 0$, ось Ox

404. $y = \frac{3}{x}$, $y = -x + 4$, ось Oy

405. $x = y^2$, $y = -2x + 10, y = 0$, ось Ox

406. $y = x^2$, $x = y^2$, ось Oy

407. $y = x^2$, $y = 3x - 2$, ось Ox

408. $y = -\frac{4}{x}$, $y = x + 5$, ось Oy

409. $y = 4 - 4x^2$, $y = 0$, ось Ox

410. $y = -\frac{2}{x}$, $y = x + 3$, ось Oy

411. $y = 2x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, ось Ox

412. $y = x^2$, $y = 4 - x^2$, $x = 0$, ось Oy

413. $y = -x^2 + 6x$, $y = x$, ось Ox

414. $y = \frac{6}{x}$, $y = -x + 7$, ось Oy

415. $y = 2x + 2$, $y = -2x + 2$, $y = 0$, ось Ox

416. $x = y^2$, $y = -2x + 3$, $x = 0$, ось Oy

417. $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$, ось Ox

418. $y = 2x^2$, $y = 2x$, ось Oy

419. $y = 1 - x^2$, $y = 1 - x$, ось Ox

420. $x = y^2$, $y = -x + 6$, $x = 0$, ось Oy

421. $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$, ось Ox

422. $y = \frac{5}{x}$, $y = -x + 6$, ось Oy

423. $y = 4x - x^2$, $y = 0$, ось Ox

424. $y = 2x$, $y = 3 - x$, $x = 0$, ось Oy

425. $y = -2x - x^2$, $y = x + 2$, $y = 0$, ось Ox

Решение типового примера.

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x$ и $y = x^2$, вокруг оси Ox (рисунок 9).

Объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = y_1(x), y = y_2(x)$ и двумя вертикальными прямыми $x = a, x = b$, вокруг оси Ox (рисунок 7) вычисляется по формуле.

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx. \qquad (15)$$

Объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $x = x_1(y), x = x_2(y)$, и двумя прямыми $y = c, y = d$, вокруг оси Оу (рисунок 8) вычисляется по формуле

$$V_{Oy} = \pi\int_c^d (x_2^2(y) - x_1^2(y))dy.$$

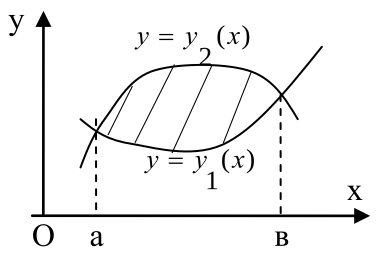


Рисунок 7

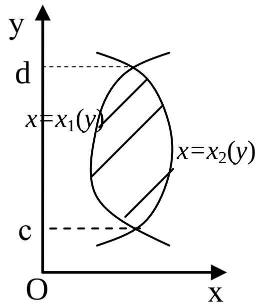


Рисунок 8

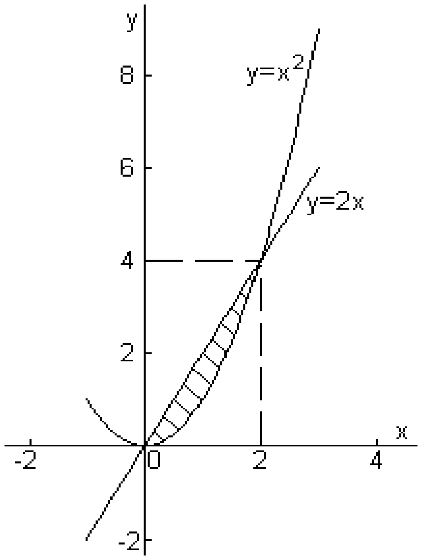


Рисунок 9

В данном примере верхней границей фигуры служит график функции $y = 2x$, а нижней – график функции $y = x^2$. Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ y = x^2, \end{cases}$$

найдем координаты точек пересечения (0;0), (2;4). Отсюда a=0, $в$=2. Подставим в формулу (15):

$$V_{ox} = \pi\int_0^2 ((2x)^2 - (x^2)^2)dx = \pi\int_0^2 4x^2dx - \pi\int_0^2 x^4dx =$$

$$= 4\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{3}\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{64}{15}\pi.$$

Задание №18

В задачах 401-411 дана функция $z = f(x;y)$. Найти:

1) полный дифференциал dz;
2) частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
3) смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

426. $z=\frac{tgx}{y}$.

427. $z=\arccos\frac{y}{x}$.

428. $z = x^{y^2}$.

429. $z=\ln\sqrt{x^2+4y}$.

430. $z=arctg\,\frac{y}{x}$.

431. $z=8\cos(xy)-3x-12x^4y$.

432. $z=x\sin(xy)+8x^2y^2-7x$.

433. $z=8\ln(xy^2)+10xy^2-8x$.

434. $z=3\sqrt{x^2+y^2}-5xy^3+8y$.

435. $z=2e^{3x+y^2}-2x^2y^2+9y$.

436. $z=e^x\ln y+\sin y\cdot\ln x$.

437. Дана функция $z=\arcsin\frac{x-y}{x+y}$. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

438. Дана функция $z=e^{\frac{x}{y}}$. Показать, что $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}$.

439. Дана функция $z=\frac{xy}{x+y}$. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

440. Дана функция $z=x\ln\frac{y}{x}$. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

441. Дана функция $z=\frac{y^2}{\sqrt{xy}}$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

442. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=\sin(xy)$.

443. Дана функция $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

444. Дана функция $z=\ln(e^x+e^y)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$.

445. Дана функция $z=\arcsin(xy)$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

446. Дана функция $y^{\ln x}$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

447. Дана функция $z = x^y$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

448. Доказать, что если $z = \ln(x^2 + y^2)$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

449. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \frac{x^2}{y^2}$.

450. Доказать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ для функции $z = arctg(2x - y)$.

Решение типового примера. Пусть $z = 3e^{x^2+y^2} + 3x^2 y + 8$.

При вычислении частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ переменную y рассматриваем как постоянную величину. Тогда можно пользоваться правилами и формулами для вычисления производной функции одной переменной.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3e^{x^2+y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_x + 6xy = 6xe^{x^2+y^2} + 6xy.$$

Аналогично, при вычислении $\frac{\partial z}{\partial y}$ считаем x постоянной величиной:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{x^2+y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_y + 3x^2 = 6ye^{x^2+y^2} + 3x^2.$$

При вычислении производных второго порядка используем те же правила и определение этих производных:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x = (6xe^{x^2+y^2} + 6xy)'_x = (6x)'_x e^{x^2+y^2} + 6x(e^{x^2+y^2})'_x + 6y =$$

$$= 6e^{x^2+y^2} + 12x^2 e^{x^2+y^2} + 6y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y = (6ye^{x^2+y^2} + 3x^2)'_y = (6y)'_y e^{x^2+y^2} + 6y(e^{x^2+y^2})'_y =$$

$$= 6e^{x^2+y^2} + 12y^2 e^{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = (6xe^{x^2+y^2} + 6xy)'_y = 6xe^{x^2+y^2} \cdot (x^2 + y^2)_y{}' + 6x = 12xye^{x^2+y^2} + 6x.$$

Задание №19

Исследовать на экстремум функцию.

451. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

452. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2.$

453. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

454. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

455. $z = 3x^2 - xy + y^2 - y + 5$.

456. $z = 2xy - x^2 - 4y^2 + 4x + y - 1$.

457. $z = 2x^2 + y^2 - 2xy - x + y - 3$.

458. $z = x^2 - xy + y^2 + 4x - 2y + 1$.

459. $z = 4x^2 + y^2 - 3xy - x + 2y$.

460. $z = x^2 - 2xy + 5y^2 + 3x - y$.

461. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.

462. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.

463. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 1$.

464. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x + 7y + 5$.

465. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$.

466. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

467. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$.

468. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + x - y + 5$.

469. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y + 1$.

470. $z = 4 - 5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y$.

471. $z = 2x^2 - 3y^2 + 2xy - 10x + 16y - 7$.

472. $z = 5 - 7x^2 - 5y^2 + 2xy - 34x + 34y$.

473. $z = 3x^2 + 2y^2 - 2xy + 18x + 8y - 1$.

474. $z = 10xy - 3x^2 - 2y^2 - 26x + 18y - 1$.

475. $z = 2x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 16y + 3$.

Решение типового примера. Пусть $z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 2x - 11y + 1$.

Найдем частные производные функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y - 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 6y - 11.$$

С помощью необходимых условий экстремума функции найдем стационарные точки. Для этого приравняем к нулю найденные частные производные:

$$\begin{cases} 4x - y - 2 = 0, \\ -x + 6y - 11 = 0, \end{cases}$$

откуда x=1; y=2. Таким образом, точка M(1;2) является стационарной.

Находим значения частных производных второго порядка в точке M:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M = 4; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M = -1; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M = 6.$$

Составляем выражение

$$\Delta = AC - B^2 = 4\cdot 6 - (-1)^2 = 23.$$

Так как $\Delta > 0$, то в этой точке экстремум существует, а так как A>0, то это минимум. Минимальное значение функции

$$z_{\min} = z(1;2) = -11.$$

Задание №20

Решить дифференциальные уравнения первого порядка.

476. а) $x\cdot(3-y^2)dy + y^2\cdot(x^3+1)dx = 0$, $y(1) = 9$.

б) $3xy^2dy - 3y^3dx = x^3dy$.

в) $y' - \dfrac{3y}{x} = x^2 + 1$.

г) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$.

477. а) $x\cdot(2-y^2)dx = 3y\cdot(x^2-5)dy$, $y(2) = 1$.

б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 3\dfrac{y}{x} + 1$.

в) $y' + y\cdot\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

г) $(2xy+3)dy = y^2dx$.

478. а) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy + 2xy^2dx$, $y(0) = 1$.

б) $y - xy' = x + y\cdot y'$.

в) $y' + xy = (1+2x)\cdot e^{-x}$.

г) $3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0$.

479. а) $\sqrt{2x+1}\cdot y' = 3y^2$, $y(4) = -1$.

б) $\dfrac{dx}{y^2 + xy - x^2} = \dfrac{dy}{y^2 - xy}$.

в) $xy' + y = 2y^2\cdot\ln x$.

г) $2xdx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

480. а) $x\cdot\sqrt{3+y^2} + y\cdot y'\cdot\sqrt{2-x^2} = 0$, $y(-1) = 1$.

б) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

в) $xy' - y = x^2\cdot\sin 3x$.

г) $(x + 2y^3)\cdot y' = y$.

481. а) $(2x^2-3)\cdot e^{2y}dx + x(1+e^{2y})dy = 0$, $y(1) = 0$.

б) $y' = \dfrac{4x+y}{x-y}$.

в) $y' + 2y = y^2 \cdot e^x$.

г) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$.

482. а) $(e^{2x}+5)dy + y \cdot e^{2x}dx = 0$, $y(0) = \sqrt{6}$.

б) $(y + \sqrt{xy})dx + xdy = 0$.

в) $x^2 \cdot y' + xy + 1 = 0$.

г) $y = xy' + y' \cdot \ln y$.

483. а) $(y^3+1) \cdot \sin 4x = y^2 \cdot y'$, $y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$.

б) $xy' = \dfrac{3y^3 + 2x^2 y}{2x^2 + y^2}$.

в) $y' + 2xy = 2x^3 \cdot y^3$.

г) $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.

484. а) $y \cdot \ln y + x \cdot y' = 0$, $y(1) = e$.

б) $2x^2 \cdot y' = x^2 + y^2$.

в) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

г) $y^2 dx = (4 - xy)dy$.

485. а) $\sqrt[3]{y} \cdot \cos^2 2xdy + tg2xdx = 0$, $y(0) = 1$.

б) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

в) $y' + y = xy^2$.

г) $x'y^3 + \ln y + 2xy^2 = 0$.

486. а) $(3 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$, $y(0) = 0$.

б) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

в) $xy' + y = 2\sqrt{x}$.

г) $x'y + x = \sqrt{y}$.

487. а) $\sqrt{x^2 + x^2 y} \cdot dy = \ln xdx$, $y(1) = -1$.

б) $\dfrac{dy}{x+2y} = \dfrac{dx}{2x-y}$.

в) $x^2 \cdot y' + xy = 5$.

г) $dx = 2xydy + e^{-y^2} \cdot x^2 dy$.

488. а) $(x^2+1)\cdot y'+2xy^3=0,\ y(0)=\dfrac{1}{2}.$

б) $(y^2-2xy)\cdot dx+x^2dy=0.$

в) $y'+\dfrac{y}{x+1}=-x^2.$

г) $y^3dx=(2+xy^2)dy.$

489. а) $x\cdot\sqrt{3y+1}\cdot dx+dy=x^2dy,\ y(0)=1.$

б) $xy'=y-xe^{\frac{3y}{x}}.$

в) $y'-\dfrac{2xy}{x^2+1}=1.$

г) $(2y+1)dx=(2y-x+1)dy.$

490. а) $y\cdot(1+\ln y)+\sin 2x\cdot y'=0,\ y(\pi)=e.$

б) $(2x^2+y^2)\cdot y'=2xy.$

в) $xy'-2y=x^3\cos x.$

г) $x'\cdot tgy=x-\cos y.$

491. а) $xy^2y'=\ln^2 x,\ y(1)=2.$

б) $(x+2y)dx-xdy=0.$

в) $xy'-2y=4x-3.$

г) $x'\cdot\sin y=x+tgy.$

492. а) $(x^2-3)ydx+xdy=0,\ y(1)=e.$

б) $y\cdot y'=2y-x.$

в) $(2x+1)\cdot y'=4x+2y.$

г) $dx=(2x+5y)dy.$

493. а) $x^3dx-xydy=dx,\ y(1)=0.$

б) $y'=\dfrac{y^2+xy-9x^2}{x^2}.$

в) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+1}{x}.$

г) $yx'+2x=x^2y^2.$

494. а) $y'\cdot tg3x=y^2+4,\ y(\dfrac{\pi}{2})=0.$

б) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5x}{y}+\dfrac{y}{x}.$

в) $y'-2xy=e^{x^2}.$

г) $2yx'+x=3y^2+2.$

495. а) $yy'=e^{3x-y^2},\ y(0)=0.$

б) $y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}$.

в) $y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = 1$.

г) $(y^2 + x + 1)dy = 2ydx$.

496. а) $xy^3 dx + y^2 dy = xdx$, $y(2) = 0$.

б) $x^2 \cdot (dy - dx) = (x + y) \cdot ydx$.

в) $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$.

г) $x' - \frac{x}{y \ln y} = x^2$.

497. а) $e^{x^2} \cdot y' = x\sqrt{4 - y^2}$, $y(0) = 0$.

б) $y^2 + x^2 \cdot y' = xy \cdot y'$.

в) $x^2 + xy' = y$.

г) $x^2 dx = (x^3 + y)dy$.

498. а) $(1 - 2x) \cdot \sin^2 y = \sqrt{ctgy} \cdot y'$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

б) $y' = \frac{3x + 2y}{x}$.

в) $y' \cdot x + y = -xy^2$.

г) $x' \cdot \sin y + \cos y = 1 + x$.

499. а) $(xy^2 - 4x)dx - \sqrt{1 - 3x^2}dy = 0$, $y(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0$.

б) $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - xy}$.

в) $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

г) $y^2 \cdot x' + 2xy = \ln y$.

500. а) $(x^2 y - 3y)dy = xe^{y^2} dx$, $y(\sqrt{2}) = 0$.

б) $y' = \frac{2xy}{2x^2 - y^2}$.

в) $3xy' - 2y = x^3 y^{-2}$.

г) $x' \cdot \cos y = x + \sin y + 1$.

Решение типовых примеров.

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $(x^2 - 1) \cdot y' + 2xy^2 = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = -\frac{1}{2}$.

Решение. Известно, что $y' = \frac{dy}{dx}$, тогда уравнение примет вид

$$(x^2-1)\cdot\frac{dy}{dx}+2xy^2=0.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$(x^2-1)\cdot dy+2xy^2\cdot dx=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, так как множители при дифференциалах dx и dy зависят только от одной переменной.
Сначала найдем общее решение данного уравнения. Для этого обе части уравнения разделим на произведение $(x^2-1)\cdot y^2\neq 0$.

$$\frac{dy}{y^2}+\frac{2x}{x^2-1}dx=0.$$

Проинтегрируем почленно:

$$\int\frac{dy}{y^2}+\int\frac{2xdx}{x^2-1}=0,\quad -\frac{1}{y}+\ln\left|x^2-1\right|=C.$$

Полученное выражение называется общим интегралом данного дифференциального уравнения. Выразив $y=-\frac{1}{\ln\left|x^2-1\right|+C}$, получим общее решение. Если переход от общего интеграла к общему решению вызывает трудности, то нет необходимости его совершать.

Теперь найдем частное решение. Известно, что частное решение получается из общего при конкретном значении произвольной постоянной C. Подставим начальное условие $x=0$, $y=-\frac{1}{2}$ в общее решение и вычислим значение C: $-\frac{1}{2}=-\frac{1}{\ln 1+C}$, откуда $C=2$.

При $C=2$, $y=-\frac{1}{\ln\left|x^2-1\right|+2}$ - это и есть частное решение данного дифференциального уравнения.

При разделении переменных производилось деление на $y^2\neq 0$. Подстановка в уравнение $y=0$ обращает его в тождество, поэтому функция $y=0$ – также является решением. Это особое решение, так как его нельзя получить из общего ни при каких значениях постоянной С.

Пример 2. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dx}{3x^2-xy}=\frac{dy}{x^2+3xy-y^2}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-xy}$

или $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - xy}$.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x;y)$ называется однородным, если функция $f(x;y)$ является однородной функцией нулевого порядка, т.е. для нее выполняется равенство $f(tx;ty) = f(x;y)$. Данное дифференциальное уравнение будет однородным первого порядка, т.к. в правой части уравнения функция $f(x;y) = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - xy}$ удовлетворяет условию

$f(tx;ty) = \dfrac{t^2x^2 + 3tx\cdot ty - t^2y^2}{3t^2x^2 - tx\cdot ty} = \dfrac{t^2\cdot(x^2 + 3xy - y^2)}{t^2\cdot(3x^2 - xy)} = f(x;y)$. Сделаем замену переменной $y = ux$, $y' = u'\cdot x + u$, где $u = u(x)$ - неизвестная функция.
В данное уравнение вместо y и y' подставим их новые значения

$$u'\cdot x + u = \frac{x^2 + 3x\cdot u\cdot x - u^2\cdot x^2}{3x^2 - x\cdot u\cdot x}.$$

Преобразуем:

$u'\cdot x + u = \dfrac{x^2(1+3u-u^2)}{x^2(3-u)}$, $\quad u'\cdot x = \dfrac{1+3u-u^2}{3-u} - u$, $u'\cdot x = \dfrac{1+3u-u^2-3u+u^2}{3-u}$,

$u'\cdot x = \dfrac{1}{3-u}$, $\dfrac{x\cdot du}{dx} = \dfrac{1}{3-u}$, $(3-u)\cdot x\cdot du = dx$.

Получим уравнение с разделяющимися переменными. Решим его.

$(3-u)\cdot du = \dfrac{dx}{x}$, $\int(3-u)\cdot du = \int\dfrac{dx}{x}$, $3u - \dfrac{u^2}{2} = \ln|x| + C$.

Подставим вместо $u = \dfrac{y}{x}$, получим $\dfrac{3y}{x} - \dfrac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$ - общий интеграл.

Пример 3. Решить уравнение $x^2\cdot y' + xy = \ln x$.

Решение. Уравнение вида $y' + p(x)\cdot y = Q(x)$ называется линейным уравнением первого порядка. Его особенность в том, что y и y' входят в первой степени и не перемножаются между собой.

Данное дифференциальное уравнение является линейным. Разделим обе части уравнения на x^2:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x^2} \qquad (*)$$

Решение линейного уравнения можно найти с помощью подстановки $y = u\cdot v$, $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - неизвестные функции.
Подставим y и y' в уравнение (*):

$$u'\cdot v + u\cdot v' + \frac{u\cdot v}{x} = \frac{\ln x}{x^2} \text{ или } u'\cdot v + u\cdot(v' + \frac{v}{x}) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Подберем функцию $v(x)$ такой, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль. Тогда последнее уравнение сведется к системе уравнений

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u' \cdot v = \dfrac{\ln x}{x^2}. \end{cases}$$

Каждое из уравнений в полученной системе будет дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Решением первое уравнение системы:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

Решим второе уравнение системы:

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x^2}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{\ln x}{x}, \quad \int du = \int \frac{\ln x}{x} dx, \quad u = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Тогда общее решение данного дифференциального уравнения будет:

$$y = u \cdot v = (\frac{\ln^2 x}{2} + C) \cdot \frac{1}{x}.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $xy' - y = y^2 \cdot \sin x$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли, т.к. его можно привести к виду $y' + p(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. Разделим обе части уравнения на x:

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2 \cdot \sin x}{x}.$$

Такое уравнение можно решить так же, как и линейное с помощью подстановки $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{u \cdot v}{x} = \frac{u^2 \cdot v^2 \cdot \sin x}{x}, \quad u' \cdot v + u \cdot (v' - \frac{v}{x}) = \frac{u^2 \cdot v^2 \cdot \sin x}{x},$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ u' \cdot v = \dfrac{u^2 \cdot v^2 \cdot \sin x}{x}. \end{cases}$$

Функцию $v(x)$ найдем из первого уравнения системы:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x|, \quad v = x.$$

Функцию $u(x)$ найдем из второго уравнения системы:

$$u' \cdot v = \frac{u^2 \cdot v^2 \cdot \sin x}{x}, \quad \frac{du}{u^2} = \sin x dx, \quad \int \frac{du}{u^2} = \int \sin x dx, \quad -\frac{1}{u} = -\cos x - C,$$

$$u = \frac{1}{\cos x + C}.$$

Значит, $y = uv = \frac{x}{\cos x + C}$ - общее решение уравнения Бернулли.

Пример 5. Решить уравнение $(2x - y^3) \cdot y' + y = 0$.
Решение. Известно, что дифференциальное уравнение $x' + p(y) \cdot x = Q(y)$ называется линейным относительно x и x', где $x = x(y)$, $x' = \frac{dx}{dy}$. Такое уравнение можно решить с помощью замены $x = u \cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ - две неизвестные функции от переменной y.
Преобразуем данное дифференциальное уравнение

$$(2x - y^3) \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Умножим обе части уравнения на $\frac{dx}{dy}$ и разделим на y:

$$2x - y^3 + y \cdot \frac{dx}{dy} = 0, \;\; 2x - y^3 + y \cdot x' = 0, \;\; x' + \frac{2x}{y} = y^2.$$

Это линейное дифференциальное уравнение. Сделаем замену $x = u \cdot v$, $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{2uv}{y} = y^2$, $u' \cdot v + u(v' + \frac{2v}{y}) = y^2$.

Перейдем к системе $\begin{cases} v' + \dfrac{2v}{y} = 0, \\ u' \cdot v = y^2. \end{cases}$ Решим первое уравнение системы:

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{2v}{y}, \;\; \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2dy}{y}, \;\; \ln|v| = -2\ln|y|, \;\; v = \frac{1}{y^2}.$$

Решим второе уравнение системы с учетом того, что $v = \frac{1}{y^2}$.

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{du}{dy} = y^2, \;\; du = y^4 dy, \;\; \int du = \int y^4 dy, \;\; u = \frac{y^5}{5} + C.$$

Тогда $x = uv = (\frac{y^5}{5} + C) \cdot \frac{1}{y^2}$ или $x = \frac{y^3}{5} + \frac{C}{y^2}$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

Задание №21

Найти: а) частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям; б-в) общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

501. а) $y'' - 7y' + 12y = 0; \quad y(0) = -3; \quad y'(0) = 1;$

б) $y'' + 3y' + 2y = 3x^2 - x;$

в) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{3x};$

502. а) $y'' - 3y' = 0; \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 2;$

б) $y'' - 3y' + 2y = 2\sin 2x;$

в) $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-x};$

503. а) $y'' + 4y = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3;$

б) $y'' - 7y' + 10y = 3e^{-3x};$

в) $y'' - 3y' = 24x - 5;$

504. а) $y'' + 6y' + 9y = 0; \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = 0;$

б) $y'' - 4y' + 5y = x^2 + 2;$

в) $y'' - 6y' + 8y = 19e^{2x};$

505. а) $y'' + 3y' - 4y = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = -1;$

б) $y'' - 4y' + 4y = \cos x;$

в) $y'' + 9y' = 6x - 1;$

506. а) $y'' - 2y' + 10y = 0; \quad y(\pi) = 1; \quad y'(\pi) = 2;$

б) $y'' - y = 2x^2 + 9;$

в) $y'' - 8y' + 16y = -9e^{4x};$

507. а) $y'' + 8y' + 16y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 4;$

б) $y'' + y = -\sin 3x;$

в) $y'' - 2y' = 5 - 8x;$

508. а) $y'' - 9y' + 18y = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = -2;$

б) $y'' - 4y = 5 - 2x + 6x^2;$

в) $y'' - y' - 30y = 4e^{-5x};$

509. а) $y'' + 25y = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3;$

б) $y'' - 4y' - 21y = -9e^{-2x};$

в) $y'' - 3y' = 3x^2 + x;$

510. а) $y'' + 4y' = 0; \quad y(0) = -5; \quad y'(0) = 6;$

б) $y'' + 16y = 8x^2 + 5;$

в) $y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x};$

511. а) $y'' + 7y' + 10y = 0; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 2;$

б) $y'' + 8y' + 20y = 4e^{x};$

в) $y'' - 4y' = 15 - 84x^2;$

512. а) $y'' + 4y' + 29y = 0; \quad y(\pi) = 1; \quad y'(\pi) = 0;$

б) $y'' + 5y' = 4\cos 2x;$

в) $y'' - 4y' - 5y = 6e^{-x};$

513. а) $y'' - 6y' + 5y = 0;\quad y(0) = 4;\quad y'(0) = 0;$

б) $y'' - 4y' + 4y = 32e^{3x};$

в) $3y'' - y' = x - 3;$

514. а) $y'' + 2y' + y = 0;\quad y(0) = -2;\quad y'(0) = 0;$

б) $y'' - 2y' + 2y = x^2 - 7x;$

в) $y'' - 12y' + 36y = 11e^{6x};$

515. а) $y'' - y' - 12y = 0;\quad y(0) = 3;\quad y'(0) = 1;$

б) $y'' + y = 3\cos 2x - \sin 2x;$

в) $y'' + 7y' = 1 - 28x;$

516. а) $y'' + 16y = 0;\quad y(\pi) = 0;\quad y'(0) = -4;$

б) $y'' - 3y' - 18y = 6x^2;$

в) $y'' + 2y' = 6e^{-2x};$

517. а) $y'' - 7y' + 6y = 0;\quad y(0) = 5;\quad y'(0) = 2;$

б) $y'' - 10y' + 29y = 7e^{-x};$

в) $y'' + y' = 3x^2 - 8;$

518. а) $y'' - 10y' + 25y = 0;\quad y(0) = -1;\quad y'(0) = -2;$

б) $y'' - 3y' - 4y = 16\cos x;$

в) $y'' - 3y' + 2y = -5e^{x};$

519. а) $y'' + 2y' + 5y = 0;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 2;$

б) $y'' - 9y = 7e^{-6x};$

в) $y'' + 5y' = 5x - 2;$

520. а) $y'' - 8y' + 7y = 0;\quad y(0) = 3;\quad y'(0) = -2;$

б) $y'' + 4y = 2x^2 - 3;$

в) $y'' + 4y' + 4y = 7e^{-2x};$

521. а) $y'' + 8y' + 15y = 0;\quad y(0) = 0;\quad y'(0) = 1;$

б) $y'' + y' - 12y = 21e^{-7x};$

в) $y'' - y' = 6x + 11;$

522. а) $y'' - 4y' + 13y = 0;\quad y(0) = 2;\quad y'(0) = 0;$

б) $y'' + y' = 7\sin 5x;$

в) $y'' - 4y' + 4y = -6e^{2x};$

523. а) $y'' + 9y = 0;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -3;\quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2;$

б) $4y'' - 3y' - y = 5e^{3x};$

в) $y'' + 2y' = 16x;$

524. а) $y'' - 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 3;$

б) $y'' - 7y' + 12y = 6x^2 - x;$

в) $y'' + 5y' + 6y = -8e^{-3x};$

525. а) $y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 1;$

б) $y'' + 25y = 9\sin 2x - \cos 2x;$

в) $y'' - y' = 6x^2 - 1.$

Решение типовых примеров.

а) Найти частные решения следующих дифференциальных уравнений второго порядка при заданных начальных условиях:

1. $y'' + 2y' - 24y = 0; \quad y(0) = -3; \quad y'(0) = 5;$
2. $y'' - 12y' + 36y = 0; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 4;$
3. $y'' - 8y' + 25y = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 3.$

Решение.

1. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k - 24 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}.$$

Так как характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $k_1 = -6$, $k_2 = 4$, то общее решение этого дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{4x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Тогда

$$y' = -6C_1 e^{-6x} + 4C_2 e^{4x},$$

поэтому, основываясь на начальных условиях, получаем

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -3, \\ -6C_1 + 4C_2 = 5. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = -1{,}7$; $C_2 = -1{,}3$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = -1{,}7e^{-6x} - 1{,}3e^{4x}.$$

2. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 12k + 36 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-144}}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Так как характеристическое уравнение имеет два равных корня $k_1 = k_2 = 6$, то общее решение соответствующего дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = e^{6x}(C_1 + C_2 x).$$

Тогда

$$y' = 6e^{6x}(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{6x}.$$

Учитывая начальные условия, получаем систему уравнений для определения C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 = -2, \\ 6C_1 + C_2 = 4. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = -2$; $C_2 = 16$. Таким образом, частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, приобретает вид

$$y = e^{6x}(16x - 2).$$

3. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 8k + 25 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-100}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i.$$

Так как корни комплексные и $\alpha = 4$, а $\beta = 3$, то общее решение записывается в виде

$$y = e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Отсюда

$$y' = 4e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{4x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x).$$

Подставив в выражения для y и y' начальные условия, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = -1, \\ 4e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0) = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -1, \\ 4C_1 + 3C_2 = 3. \end{cases}$$

Таким образом, $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{7}{3}$ и, следовательно, частное решение имеет вид

$$y = e^{4x}\left(\frac{7}{3}\sin 3x - \cos 3x\right).$$

б-в) Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - y' - 2y = e^{2x}$;
2. $y'' + y' = 2x + 3$;
3. $y'' + 2y' - 3y = 5\cos x + \sin x$.

Решение.

1. Общее решение уравнения находим по формуле

$$y = y_0 + \bar{y}.$$

Найдём y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения.

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

$$k^2 - k - 2 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -1, \text{ поэтому } y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Подбираем теперь частное решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$\bar{y} = Axe^{2x},$$

где A – неизвестный коэффициент.

Определим коэффициент A. Найдём производные

$$\bar{y}' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},$$

$$\bar{y}'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Поскольку $\bar{y}$ – решение данного уравнения, то, подставляя $\bar{y}$ $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в данное уравнение, получим равенство:

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - (Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) - 2Axe^{2x} = e^{2x}.$$

Сократив на e^{2x} и выполнив преобразования получим

$$3A = 1, \text{ откуда } A = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\bar{y} = \frac{1}{3} xe^{2x}$.

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} xe^{2x}.$$

2. Найдём y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + y' = 0.$$

$$k^2 + k = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -1.$$

Значит $y_0 = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Подбираем теперь частное решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$\bar{y} = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx.$$

Найдём неизвестные коэффициенты A и B.

$$\bar{y}' = 2Ax + B, \quad \bar{y}'' = 2A.$$

Подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в исходное уравнение, получаем

$$2A + 2Ax + B = 2x + 3.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} при\ x & 2A = 2, \\ при\ x^0 & 2A + B = 3, \end{array}\right\} \text{ откуда } \begin{cases} A = 1, \\ B = 1. \end{cases}$$

Таким образом $\bar{y} = x^2 + x$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 + x.$$

3. Общее решение заданного уравнения находим по формуле

$$y = y_0 + \bar{y}.$$

Запишем характеристическое уравнение и найдём его корни.

$$k^2 + 2k - 3 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}.$$

Так как $k_1 = -3$, $k_2 = 1$, то $y_0 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$.

Подбираем теперь частное решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x.$$

Определим значения неизвестных коэффициентов A и B. Найдём производные

$$\bar{y}' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$\bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставляя $\bar{y}$ $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в уравнение, получим

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) - 3(A\cos x + B\sin x) = 5\cos x + \sin x,$$

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - 3A\cos x - 3B\sin x = 5\cos x + \sin x.$$

Приведя подобные слагаемые, получим равенство

$$-4A\cos x - 4B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x = 5\cos x + \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получим

при $\cos x: -4A + 2B = 5$,

при $\sin x: -4B - 2A = 1$;

$$\begin{cases} -4A + 2B = 5, \\ -2A - 4B = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -4A + 2B = 5, \\ 4A + 8B = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 10B = 3, \\ 4A = 2B - 5. \end{cases}$$

Таким образом, $A = -1{,}1$; $\quad B = 0{,}3$.

Значит $\bar{y} = 0{,}3\sin x - 1{,}1\cos x$. Следовательно, общее решение заданного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + 0{,}3\sin x - 1{,}1\cos x.$$

Задание №22

а) исследовать на сходимость с помощью признака сравнения знакоположительный ряд; б) исследовать на сходимость с помощью признака Даламбера знакоположительный ряд; в) исследовать на сходимость с помощью признака Лейбница знакочередующийся ряд; г) найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

	а)	б)	в)	г)
526.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^2(n-1)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{(2n)!(n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{4n-3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n}}{9^n(2n-1)}$

527. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{4n^3-2}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(n-1)!(2n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$

528. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{4+9n^2}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n)!}{(3n+1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+5}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n+1}}{4^n(3n-1)}$

529. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+4n^3}}{2n^3+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(n-2)!}{(2n+3)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(5n+3)}{2n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{4^n(n+1)^2}$

530. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+3n}{1+9n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n+1)!(2n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{n^2+2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^n}{3^{n-1}}$

531. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{3n^2+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(2n-1)!}{(3n-2)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{n^3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^{n+1}}{2^n}$

532. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}(2n-1)}{n+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{\sqrt{n}}$

533. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+5}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{5n-1}}{n\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{n\sqrt{n}3^n}$

534. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{2n^3+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+1)^n}{n(n+1)}$

535. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^3+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n+1)!(2n)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}n}{2n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{16^n(2n-1)}$

536. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{\sqrt{4+n^6}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{5n+1}}{\sqrt{n^3}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{n}$

537. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9+16n^3}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)3^n}$

538. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^5+2}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!(2n)!}{(3n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(5n+3)}{3n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{(2n-1)^2}$

539. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n\sqrt{9n+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!}{(n-1)!n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+3}(x-3)^n}{5^{n+2}}$

540.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n^3+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!}{(n+2)!(2n+1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{n^3+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^2\cdot 4^n}$
541.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+9}}{2n^3+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(2n-1)}{(2n+1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^{2n}}{3n+2}$
542.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{n^2+4}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(2n+1)!\,n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+5)^{n-1}}{7^n\sqrt{2n+1}}$
543.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+5n}{n\sqrt{n+3}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n+2)!(n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{9n^2+4}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^{n+1}}$
544.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+6}}{n^3+2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^2}{(2n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}(2n-1)}{n+3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^{2n}}{4^n(3n-1)}$
545.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+2n}{10n^2-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!n!}{(2n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{(2n+1)^2}$
546.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n^5+3}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-3)!}{(n+1)!(3n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{\sqrt{n+3}\cdot 3^n}$
547.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5+2n}{n^2+3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(2n-1)!}{(3n-2)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^n}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$
548.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}}{2n^2+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-1)!}{(2n+1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{4n+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-7)^n}{6^{n+1}}$
549.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2+7}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{(n!)^2(2n)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{(2n+1)3^{n+1}}$
550.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{n^3+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+3)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{2n}}{3n-1}$

Решение типовых примеров.

а) Исследовать на сходимость с помощью признака сравнения ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{2n^3+5}.$$

Решение. Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится, так как степень p=2>1. Общие члены этих рядов $u_n=\frac{\sqrt{n^2+3}}{2n^3+5}$, $v_n=\frac{1}{n^2}$.

В соответствии с признаком сравнения вычислим предел.

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{2n^3+5}\cdot\frac{n^2}{1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^2}{2n^3}=\frac{1}{2}.$$

Так как d конечное число и d≠0, то оба ряда одновременно сходятся.

б) Исследовать на сходимость с помощью признака Даламбера знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{(2n-1)!\,n!}$.

Решение. Общий член ряда $u_n=\frac{(3n+1)!}{(2n-1)!\,n!}$.

Тогда $u_{n+1}=\frac{(3(n+1)+1)!}{(2(n+1)-1)!\,(n+1)!}=\frac{(3n+4)!}{(2n+1)!\,(n+1)!}$.

В соответствии с признаком Даламбера вычислим предел

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)!}{(2n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!\,n!}{(3n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}{2n\cdot(2n+1)(n+1)}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\cdot 3n\cdot 3n}{2n\cdot 2n\cdot n}=\frac{27}{4}.$$

Так как d>1, то заданный ряд расходится.

в) С помощью признака Лейбница исследовать сходимость знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$.

Решение. Рассмотрим абсолютные величины членов исходного ряда

$$u_n=\frac{1}{5n-1}$$

Очевидно, что u_n убывает с ростом n. Кроме того $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5n-1}=0$

Выполнены оба условия признака Лейбница, т.е. ряд сходится.

г) Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{7^n n^2}$ и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение. Общий член ряда $u_n = \dfrac{(x+3)^n}{7^n n^2}$. Применим признак Даламбера.

$$d = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^{n+1}}{7^{n+1}(n+1)^2}\cdot\frac{7^n n^2}{(x+3)^n}\right| = \frac{|x+3|}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{|x+3|}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2} = \frac{|x+3|}{7}.$$

Таким образом, при $\dfrac{|x+3|}{7} < 1$, т.е. при $-10<x<4$ исходный ряд сходится абсолютно. Выясним вопрос о сходимости ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках x= – 10, x=4.

При x= -10 заданный ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-7)^n}{7^n n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Это знакочередующийся ряд. Его общий член по абсолютной величине убывает и стремиться к нулю при $n\to\infty$. Таким образом, ряд сходится по признаку Лейбница.

При x=4 исходный ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n}{7^n n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Этот знакоположительный ряд сходится, так как степень p=2>1.

Таким образом, область сходимости исходного степенного ряда $-10 \le x \le 4$.

Задание №23

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подинтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда.

551. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$

552. $\displaystyle\int_0^{1/3} e^{-x^3}x\,dx$

553. $\displaystyle\int_0^{1/2}\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$

554. $\displaystyle\int_0^{1/2} x\cos\sqrt{x}\,dx$

555. $\displaystyle\int_0^{1/2} x\ln\left(1+x^2\right)dx$

564. $\displaystyle\int_0^{1/2} xe^{-x^3}dx$

565. $\displaystyle\int_0^{1/2}\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$

566. $\displaystyle\int_0^{1} x\sin x^2 dx$

567. $\displaystyle\int_0^{1/2} x^2\cos\sqrt{x}\,dx$

568. $\displaystyle\int_0^{1/3}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$

556. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx$

557. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

558. $\int\limits_0^{1/2} x^2 e^{-x^4} dx$

559. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

560. $\int\limits_0^{1/2} x\cos\sqrt{x^3} dx$

561. $\int\limits_0^{1/3} x\ln(1+x) dx$

562. $\int\limits_0^{1/5} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

563. $\int\limits_0^{1/3} \sqrt{1+x^3} dx$

569. $\int\limits_0^{1/6} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} dx$

570. $\int\limits_0^{1/3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$

571. $\int\limits_0^{1/2} x e^{-x^4} dx$

572. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x^2}{x^2} dx$

573. $\int\limits_0^{1} x^2 \cos x^2 dx$

574. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^3)}{x^2} dx$

575. $\int\limits_0^{1/3} \sqrt{x^3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$

Решение типового примера. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл $\int\limits_0^{1/2} x^2 e^{-x^2} dx$ путем предварительного разложения подинтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

Решение. В разложении функции e^x в степенной ряд $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

заменим x на ($-x^2$). Тогда получим $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$

Следовательно

$$\int\limits_0^{1/2} x^2 e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{1/2} \left(x^2 - \frac{x^4}{1!} + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^8}{3!} + \ldots \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{1!\cdot 5} + \frac{x^7}{2!\cdot 7} - \ldots \right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{160} + \frac{1}{1792} - \ldots$$

Полученный знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Третий член этого ряда по абсолютной величине меньше 0,001, поэтому для обеспечения требуемой точности нужно просуммировать первые два члена ряда.

Итак. $\int\limits_0^{1/2} x^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{24} - \frac{1}{160} = 0{,}048.$

Задание №24

Вычислить повторный интеграл и изменить порядок интегрирования

576. $\int\limits_{-2}^{4} dx \int\limits_{-1}^{x+2} 4xdy$

577. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{y^2+1} 2xydx$

578. $\int\limits_{-2}^{3} dy \int\limits_{-1}^{5-y} 2ydx$

579. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{\frac{4}{9}x^2}^{x+1} 6xdy$

580. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-x^2}^{3} 4xydy$

581. $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{y} 6ydx$

582. $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{-2}^{y^2} 2xydx$

583. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2-3}^{2x-3} 4xdy$

584. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{4-y} 6xydx$

585. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+4} 2xdy$

586. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} 4xydy$

589. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{4-x^2}^{6-x} 2xdy$

590. $\int\limits_{0}^{8} dx \int\limits_{-1}^{\sqrt{2x}} 2ydy$

591. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} 2xydx$

592. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{\frac{4}{x}}^{-x} xdy$

593. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-2x}^{x^2} (3x + 2y)dy$

594. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\frac{1}{2}y}^{\frac{1}{4}y^2} (8x + 2y)dx$

595. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{4+y}} xdx$

596. $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{4-2x}^{x+1} (x + 2y)dy$

597. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{2+x} ydy$

598. $\int\limits_{-4}^{1} dy \int\limits_{y^2-4}^{-3y} ydx$

599. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{2x-1}^{x+1} xdy$

587. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{-y}} 2x dx$

600. $\int\limits_{-3}^{-1} dy \int\limits_{-2-y}^{-\frac{3}{y}} 4x dx$

588. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{-y}^{y^3} 6y^2 dx$

Решение типового примера.

Вычислить повторный интеграл $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x-2}^{x} xy dy$ и изменить порядок интегрирования.

Решение.

$$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x-2}^{x} xy dy = \int\limits_{0}^{2} dx \left(\frac{xy^2}{2} \right) \Bigg|_{x-2}^{x} = \int\limits_{0}^{2} \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x(x-2)^2}{2} \right) dx = \int\limits_{0}^{2} \left(2x^2 - 2x \right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - x^2 \right) \Bigg|_{0}^{2} = \frac{4}{3}.$$

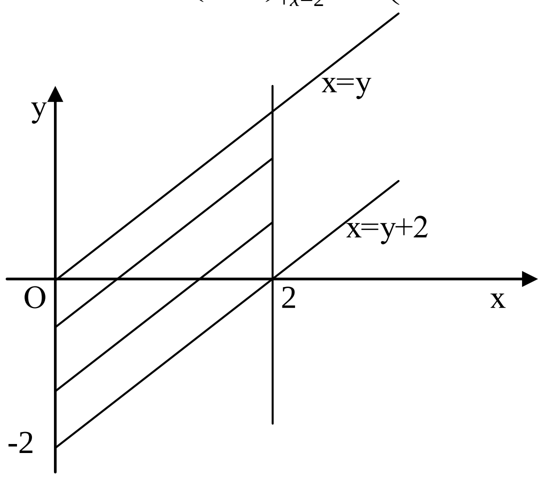


Рисунок 10

Чтобы изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, изобразим область интегрирования, учитывая, что она ограничена прямыми x=0, x=2, y=x-2, y=x.

Тогда

$$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x-2}^{x} xy dy = \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+2} xy dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} xy dx.$$

Задание № 25

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

601. $y^3 = x,\ x + y + 2 = 0,\ y + 2x = 0.$

602. $y = x^2 + 1,\ x + y = 3.$

603. $xy = 4,\ x + y = 5.$

604. $y^2 = 4 + x,\ x + 3y = 0.$

605. $x = 2y^2,\ x = y + 3.$

606. $y = \sqrt{x},\ 2y + x = 0,\ x + y = 2.$

607. $y = 2x,\ y = x,\ x + y = 6.$

608. $y = \sqrt{x},\ y = -x,\ y = x - 2.$

609. $y = -2x,\ 2y = x,\ x + y = 3.$

610. $y=-\sqrt{x}$, $y=x-6$, $2y=x$.

611. $x=\sqrt{y}$, $x=\sqrt{8-y}$, $y=-2x$.

612. $y=e^{2x}$, $y=e^{-x}$, $y=e$.

613. $x=\sqrt{y}$, $2x+y=8$, $x+y=0$.

614. $y=\sqrt{x+4}$, $x+y+4=0$, $y=x-2$.

615. $xy=4$, $y=4x$, $y=x$.

616. $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{3x}$, $x+y=6$.

617. $y=x^3$, $x+y=2$, $2y+x=0$.

618. $y=\sqrt{x}$, $x=\sqrt{-y}$, $x=y+2$.

619. $4y=x^2$, $y=4x^2$, $x=\sqrt{5-y}$.

620. $x=\sqrt{y}$, $x=\sqrt{2-y}$, $y=x+2$.

621. $y=x+2$, $x=\sqrt{y}$, $x+y=0$.

622. $xy=2$, $y=4$, $x=2\sqrt{y}$.

623. $y=-\sqrt{-x}$, $y=0$, $x+y+6=0$.

624. $y=-x$, $y=-\dfrac{4}{x}$, $y=0$, $x=4$.

625. $x=-\sqrt{y}$, $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$.

Решение типового примера.

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=-\dfrac{x}{2}$, $y=4-x$.

Решение. Площадь области D находится по формуле

$$S=\iint\limits_D dxdy$$

В нашем примере область D имеет вид (рисунок 11):

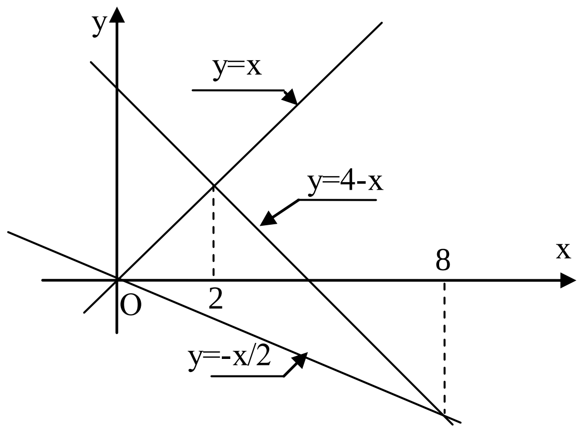


Рисунок 11

Поэтому

$$S=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{x} dy+\int\limits_2^8 dx\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{4-x} dy=\int\limits_0^2 dxy\Big|_{-\frac{x}{2}}^{x}+\int\limits_2^8 dxy\Big|_{-\frac{x}{2}}^{4-x}=\int\limits_0^2\left(x+\frac{x}{2}\right)dx+\int\limits_2^8\left(4-x+\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{3x^2}{4}\Bigg|_0^2+\left(4x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_2^8=12.$$

Задание №26

В задачах 601-613 установить независимость от пути интегрирования и вычислить криволинейный интеграл $\int P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ по контуру, связывающему точки $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

626. $P(x,y)=x^3-2y$; $Q(x,y)=-2x+5$; $M(0;1)$, $N(1;2)$.

627. $P(x,y)=1+2xy$; $Q(x,y)=x^2+y$; $M(0;-1)$, $N(1;1)$.

628. $P(x,y)=x^2-y$; $Q(x,y)=-x+3y$; $M(-1;0)$, $N(0;2)$.

629. $P(x,y)=3+xy$; $Q(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2y$; $M(-2;1)$, $N(-1;2)$.

630. $P(x,y)=5x-2y$; $Q(x,y)=-2x+y$; $M(-2;-1)$, $N(0;3)$.

631. $P(x,y)=3x^2-y$; $Q(x,y)=-x-3y$; $M(-2;-1)$, $N(-1;1)$.

632. $P(x,y)=4xy+3$; $Q(x,y)=2x^2-y$; $M(1;1)$, $N(2;4)$.

633. $P(x,y)=4+xy^2$; $Q(x,y)=x^2y+2y$; $M(2;0)$, $N(3;5)$.

634. $P(x,y)=2xy+8$; $Q(x,y)=x^2+2y$; $M(-3;1)$, $N(0;6)$.

635. $P(x,y)=5x^2-3y$; $Q(x,y)=y^2-3x$; $M(-4;2)$, $N(1;4)$.

636. $P(x,y)=6x^2+5y$; $Q(x,y)=5x+2y^2$; $M(-5;0)$, $N(1;3)$.

637. $P(x,y)=10xy+x^2$; $Q(x,y)=5x^2-y$; $M(-5;1)$, $N(2;4)$.

638. $P(x,y)=2x^2y-1$; $Q(x,y)=\frac{2}{3}x^3-1$; $M(-6;1)$, $N(-3;4)$.

Решение типового примера. Вычислим криволинейный интеграл $L=\int(x^2+3xy)dx+\left(\frac{3}{2}x^2+y\right)dy$ по контуру, соединяющему точки M(1;1) и N(2;3), предварительно убедившись в независимости его от пути интегрирования. В данном случае выполнено условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, где $P=x^2+3xy,\quad Q=\frac{3}{2}x^2+y$. Действительно,

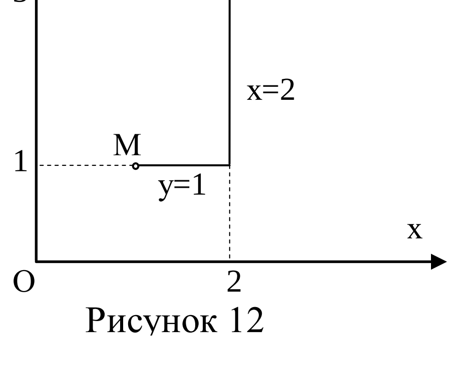


Рисунок 12

$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x$. Выберем в качестве контура интегрирования наиболее простой контур, связывающий точки M и N , например, ломаную, звенья которой параллельны осям координат (рисунок 12). Имеем на первом участке: y=1, dy=0, $1 \le x \le 2$; на втором участке x=2, dx=0, $1 \le y \le 3$. Таким образом,

$$L = \int_1^2 \left(x^2 + 3x\right)dx + \int_1^3 (6 + y)dy = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 + \left(6y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = 22\frac{5}{6}$$

В задачах 614-625 вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где L – треугольник ABC, пробегаемый по ходу часовой стрелки.

639. $P(x,y) = 2x + 3y$; $Q(x,y) = 2y - x$; $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$.
640. $P(x,y) = 3x + y$; $Q(x,y) = 4y + 2x$; $A(0;0)$, $B(0;2)$, $C(2;2)$.
641. $P(x,y) = x - 4y$; $Q(x,y) = 2y - 3x$; $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$.
642. $P(x,y) = 4x + y$; $Q(x,y) = 3x - y$; $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(3;3)$.
643. $P(x,y) = -2x - 3y$; $Q(x,y) = -4x + 5y$; $A(0;0)$, $B(-1;0)$, $C(-1;-1)$.
644. $P(x,y) = -5y + x$; $Q(x,y) = -y - 5x$; $A(0;0)$, $B(-3;0)$, $C(-3;-3)$.
645. $P(x,y) = xy + 1$; $Q(x,y) = 4x - 2y$; $A(0;0)$, $B(0;-2)$, $C(-2;-2)$.
646. $P(x,y) = 2x - 3xy$; $Q(x,y) = 2y - 10x$; $A(0;0)$, $B(0;-3)$, $C(-3;-3)$.
647. $P(x,y) = (2 - 4xy)$; $Q(x,y) = 5xy + 2$; $A(0;0)$, $B(-2;0)$, $C(-2;2)$.
648. $P(x,y) = 5 - xy$; $Q(x,y) = -7x - 2y$; $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;1)$.
649. $P(x,y) = x - y$; $Q(x,y) = xy - 4$; $A(0;0)$, $B(0;-3)$, $C(3;-3)$.
650. $P(x,y) = 2x - 8y$; $Q(x,y) = 7x + y$; $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;-2)$.

Решение типового примера.

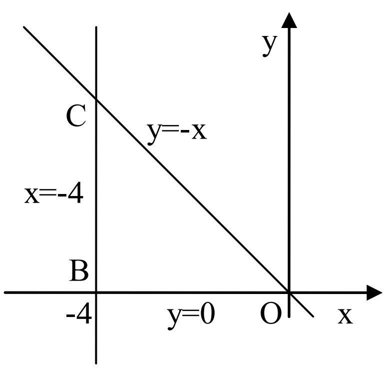


Рисунок 13

Вычислим криволинейный интеграл $Z = \int\limits_L \left(2x - 96y\right)dx + 3xydy$, где L – треугольник OBC, пробегаемый по ходу часовой стрелки, причем O(0,0), B(-4,0), C(-4,4) (рисунок 13). Треугольник OBC разобьем на три участка: OB, BC, CO.

На первом участке: y=0, dy=0, $-4 \le x \le 0$;
На втором участке: x=-4, dx=0, $0 \le y \le 4$;
На третьем участке: y=-x, dy=- dx, $-4 \le x \le 0$.
Таким образом,

$$Z=\int_{0}^{-4}2xdx+\int_{0}^{4}(-12y)dy+\int_{-4}^{0}(2x+9x)dx+3x^2dx=x^2\Big|_{0}^{-4}-6y^2\Big|_{0}^{4}+\left(\frac{11x^2}{2}+x^3\right)\Bigg|_{-4}^{0}=-104$$

Задание №27

Найти вероятность указанных событий, пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей.

651. а) В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлечённых 2-х деталей есть хотя бы одна стандартная.

б) Три орудия ведут огонь по цели. Вероятность попадания в цель из первого орудия равна 0,7; из второго – 0,9; из третьего – 0,6. Каждое орудие стреляет один раз. Найти вероятность того, что два орудия попадут в цель.

652. а) В урне 8 белых шаров и 4 чёрных шара. Найти вероятность того, что среди 5 отобранных наудачу шаров окажется не более одного чёрного шара.

б) Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,3, для второго – 0,4. Найти вероятность того, что в течение смены только один станок выйдет из строя.

653. а) На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 8 учебников, причём 3 из них в переплёте. Библиотекарь берёт наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплёте.

б) В урне 12 шаров, из них 8 белых. Найти вероятность того, что среди двух наудачу извлечённых шаров только один белый.

654. а) В лотерее 20 билетов, из них 4 выигрышных. Найти вероятность того, что из трёх взятых билетов хотя бы один выигрышный.

б) Электрическая цепь состоит из трёх последовательно соединенных элементов, которые выходят из строя с вероятностью соответственно 0,2; 0,4 и 0,1. Найти вероятность того, что разрыва цепи не будет.

655. а) Из колоды карт (36 штук) наудачу взяты четыре карты. Найти вероятность того, что все они окажутся одной масти.

б) Четыре электролампы соединены последовательно. Вероятность выхода из строя для каждой из них равна 0,1. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

656. а) В одном ящике – 15 деталей, из них 12 стандартных, в другом – 20 деталей, из них 13 стандартных. Взяли по одной детали из каждого ящика. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется стандартной.

б) Вероятность того, что изделие высшего сорта, равна 0,7. Найти вероятность того, что из двух изделий только одно будет высшего сорта.

657. а) Студент знает ответ на 25 вопросов из 40 вопросов программы. Найти вероятность того, что он знает ответ на оба предложенных ему вопроса.

б) Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,95; второе – 0,9; третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает только одно устройство.

658. а) Устройство состоит из 3 элементов, работающих независимо. Вероятность безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно будут работать все 3 элемента.

б) В группе из 22 студентов имеется 4 отличника. Выбираются наудачу три студента. Какова вероятность того, что среди них 2 отличника?

659. а) Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что на каждой из выпавших граней появится 5 очков.

б) Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить 4 бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

660. а) В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

б) Три исследователя независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

661. а) В ящике 9 иногородних и 4 местных письма. Найти вероятность того, что два вынутых наудачу письма иногородние.

б) В первом ящике 8 белых и 10 чёрных шаров. Во втором ящике 12 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика наудачу вынули по одному шару. Какова вероятность того, что шары разного цвета?

662. а) Из тридцати рабочих норму выработки не выполняют 6 человек. Найти вероятность того, что из двух случайно выбранных рабочих только один не выполнит норму.

б) Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят 1-ый вызов, равна 0,2; 2-ой – 0,3; 3-ий – 0,4. События, состоящие в том, что любой вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов.

663. а) Институтская команда по шахматам имеет в своём составе 2 кандидата в мастера спорта и 4 перворазрядника. Для участия в следующем туре соревнований случайным образом отобрано 3 спортсмена. Найти вероятность того, что все они перворазрядники.

б) Вероятность того, что каждый из трёх друзей придёт в условленное место, соответственно равны: p_1=0,8; p_2=0,4; p_3=0,7. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться двум из трёх друзей.

664. а) Автопарк некоторого предприятия имеет в своём распоряжении 2 «Икаруса» и 5 «ЛАЗов». Для поездки сотрудников к морю случайным образом было выбрано 2 автобуса. Найти вероятность того, что это «Икарусы».

б) Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что хотя бы на одной из костей выпадет 6 очков?

665. а) Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на 8 вопросов из 30, которые могут быть предложены. Какова вероятность того, что студент сдаст коллоквиум?

б) Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,92; второе – 0,85; третье – 0,8. Найти вероятность того, что при аварии сработают два устройства.

666. а) Партия семян, состоящая из 10 мешков, подлежит приёмке, если при проверке наугад выбранных двух мешков окажется, что содержащиеся в них семена удовлетворяют стандарту. Найти вероятность приёмки партии, содержащей в 4 мешках нестандартные семена.

б) На предприятии имеется 3 автомобиля. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,9; второго – 0,7; третьего – 0,8. Найти вероятность того, что только два автомобиля проработают безотказно в течение определённого времени.

667. а) В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов приходится 12 денежных и 8 вещевых выигрышей. Какова вероятность выигрыша хотя бы на один из трёх приобретённых билетов?

б) Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,7; для второго – 0,6; для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично» не более чем одним из студентов.

668. а) В урне 10 красных, 5 зелёных и 3 чёрных шара. Определить вероятность того, что взятые наудачу два шара будут одного цвета.

б) Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,6; для второго – 0,8; для третьего – 0,3. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично» хотя бы одним из них?

669. а) На базу поступило 40 ящиков овощей, из них 30 первого сорта, остальные второго. Наудачу для проверки берут два ящика. Какова вероятность того, что они содержат овощи разного сорта?

б) Первый студент из 20 вопросов программы выучил 17, второй – 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Определить вероятность того, что хотя бы один ответит верно.

670. а) В первой бригаде 6 тракторов, во второй – 9. В каждой бригаде 1 трактор требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Какова вероятность того, что оба трактора исправны?

б) Из урны, содержащей 4 красных и 6 чёрных шаров, вынимают 2 шара (без возвращения первого). Какова вероятность того, что будут вынуты шары разного цвета?

671. а) Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Приобретено три билета. Какова вероятность выиграть хотя бы по одному из них?

б) В первой урне 5 красных, 3 белых и 2 чёрных шара. Во второй 3 белых и 2 чёрных шара. Из первой урны взято 2 шара, а из второй один. Определить вероятность того, что все шары одного цвета.

672. а) В первом ящике 1 белый, 2 красных и 3 синих шара; во втором ящике 2 белых, 6 красных, 4 синих. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих?

б) Вероятность того, что в течение дня произойдёт неполадка станка, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение четырёх дней подряд не произойдёт ни одной неполадки?

673. а) В магазин вошли 3 покупателя. Вероятность покупки для каждого из них равна 0,3. Найти вероятность того, что два из них совершат покупки.

б) Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии – 0,2; на втором – 0,35; на третьем – 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды хотя бы на одном предприятии.

674. а) Читатель в поисках нужной книги обходит три библиотеки. Вероятность того, что она имеется в очередной библиотеке, равна 0,25. Найти вероятность того, что читатель найдёт книгу хотя бы в одной из них.

б) В группе студентов, состоящей из 18 человек, 7 юношей и 11 девушек. Для участия в конференции случайным образом отобрано двое студентов. Какова вероятность того, что среди них будет один юноша и одна девушка?

675. а) Вероятность выхода из строя станка в течении одного рабочего дня равна 0,05. Найти вероятность того, что за четыре рабочих дня станок ни разу не выйдет из строя.

б) В ящике 15 деталей, из них 3 бракованные. Наудачу из ящика вынули три детали. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна бракованная.

Решение типовых примеров.

Пример 1. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определённого товара по телевидению, равна 0,08. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же товара на рекламном щите, равна 0,04. Предполагается, что оба события независимые. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит только одну из двух реклам.

Решение.

Рассмотрим события: A – потребитель увидит рекламу товара по телевидению;

B – потребитель увидит рекламу товара на рекламном щите.

По условию $P(A)=0{,}08$; $P(B)=0{,}04$.

Пусть событие C – потребитель увидит только одну рекламу из двух реклам. Тогда

$$C=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B.$$

Пользуясь несовместностью событий-слагаемых и независимостью событий-сомножителей, получим

$$P(C)=P(A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B)=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B),$$

$$P(C)=0{,}08\cdot 0{,}96+0{,}92\cdot 0{,}04=0{,}0768+0{,}0368=0{,}1136.$$

Пример 2. В урне 10 белых и 4 чёрных шара. Из урны один за другим вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые, если вынутые шары в урну не возвращались.

Решение.

Рассмотрим события: $A-$ первый шар белый;

$B-$ второй шар белый.

В данном случае события A и B зависимые, так как вероятность появления белого шара при втором извлечении зависит от того, был ли раньше извлечён белый шар. Рассмотрим событие C – оба шара белые. Тогда $C=A\cdot B$.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий

$$P(C)=P(A)\cdot P(B/A),$$

$$P(A)=\frac{6}{10},\qquad P(B/A)=\frac{5}{9},$$

$$P(C)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}.$$

Задание №28

Найти вероятность указанных событий, пользуясь формулой Бернулли или теоремами Лапласа.

676. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он включён в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент включено 4 мотора.

677. Произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,8. Найти вероятность того, что событие А появится более трёх раз.

678. Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что число «3» появится 2 раза.

679. В партии 70% цветных катушек ниток. Какова вероятность того, что среди четырёх наудачу взятых катушек 3 с цветными нитками?

680. Орудие сделало 8 выстрелов по цели. Вероятность попадания по цели при каждом выстреле равна 1/3. Найти вероятность 5 попаданий.

681. Вероятность того, что холодильник потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 5 холодильников потребуют ремонта 2.

682. В телестудии 5 телекамер. Вероятность того, что телекамера в данный момент включена (для каждой из них), равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включено четыре телекамеры.
683. Вероятность того, что в течение данного времени ёлочная гирлянда перегорит, равна 1/8. Найти вероятность того, что в течение данного времени из 6 ёлочных гирлянд 2 перегорят.
684. В водоёме карпы составляют 70%. Найти вероятность того, что из 5 выловленных в этом водоёме рыб окажется не менее 4-х карпов.
685. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из 4 посеянных семян взойдёт не менее 3.
686. В хлопке число длинных волокон составляет 80%. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 волокон окажется одно длинное.
687. Вероятность попадания стрелком в цель равна 3/4. Сделано 6 выстрелов. Определить вероятность пяти попаданий.
688. Вероятность того, что машина, взятая напрокат, будет возвращена исправной, равна 0,8. Какова вероятность того, что из 4 возвращённых машин 3 окажутся исправными?
689. На тракторном заводе рабочий за смену изготовляет 225 деталей. Вероятность того, что деталь окажется первого сорта, равна 0,8. Какова вероятность того, что деталей первого сорта будет ровно 165 штук.
690. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.
691. Вероятность появления события А в каждом из 300 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие А появится не менее 210 раз и не более 225 раз.
692. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 200 веточек роз 104 веточки окажутся красными розами, если в общей корзине красных – 60%.
693. Вероятность положительного результата при химическом анализе равна 0,8. Найти вероятность получения 85 положительных исходов при 100 анализах.
694. При автоматической прессовке карболитовых болванок 4/5 от общего числа не имеют дефектов. Какова вероятность того, что из 600 взятых наудачу болванок без дефектов окажется не менее 490 и не более 510?
695. Баскетболист забрасывает мяч в корзину в среднем в 8 случаях из 10. Найти вероятность того, что будет не менее 110 и не более 115 попаданий, если выполнено 150 бросков.
696. Известно, что 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных специалистов высшее образование имеет: а) не менее 70; б) от 65 до 90 человек.
697. Всхожесть зерна, хранящегося на складе, равна 80%. Какова вероятность того, что среди 100 зёрен: а) число всхожих составит от 68 до 90 шт.?
698. В автопарке имеется 400 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,9. Определить вероятность того, что в определённый момент времени безотказно работающих машин будет от 345 до 370 штук.

или $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - xy}$.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x;y)$ называется однородным, если функция $f(x;y)$ является однородной функцией нулевого порядка, т.е. для нее выполняется равенство $f(tx;ty) = f(x;y)$. Данное дифференциальное уравнение будет однородным первого порядка, т.к. в правой части уравнения функция $f(x;y) = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - xy}$ удовлетворяет условию

$f(tx;ty) = \dfrac{t^2x^2 + 3tx \cdot ty - t^2y^2}{3t^2x^2 - tx \cdot ty} = \dfrac{t^2 \cdot (x^2 + 3xy - y^2)}{t^2 \cdot (3x^2 - xy)} = f(x;y)$. Сделаем замену переменной $y = ux$, $y' = u' \cdot x + u$, где $u = u(x)$ - неизвестная функция.
В данное уравнение вместо y и y' подставим их новые значения

$$u' \cdot x + u = \frac{x^2 + 3x \cdot u \cdot x - u^2 \cdot x^2}{3x^2 - x \cdot u \cdot x}.$$

Преобразуем:

$u' \cdot x + u = \dfrac{x^2(1 + 3u - u^2)}{x^2(3 - u)}$, $\quad u' \cdot x = \dfrac{1 + 3u - u^2}{3 - u} - u$, $\;u' \cdot x = \dfrac{1 + 3u - u^2 - 3u + u^2}{3 - u}$,

$u' \cdot x = \dfrac{1}{3 - u}$, $\;\dfrac{x \cdot du}{dx} = \dfrac{1}{3 - u}$, $\;(3 - u) \cdot x \cdot du = dx$.

Получим уравнение с разделяющимися переменными. Решим его.

$(3 - u) \cdot du = \dfrac{dx}{x}$, $\;\int (3 - u) \cdot du = \int \dfrac{dx}{x}$, $\;3u - \dfrac{u^2}{2} = \ln|x| + C$.

Подставим вместо $u = \dfrac{y}{x}$, получим $\dfrac{3y}{x} - \dfrac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$ - общий интеграл.

Пример 3. Решить уравнение $x^2 \cdot y' + xy = \ln x$.

Решение. Уравнение вида $y' + p(x) \cdot y = Q(x)$ называется линейным уравнением первого порядка. Его особенность в том, что y и y' входят в первой степени и не перемножаются между собой.

Данное дифференциальное уравнение является линейным. Разделим обе части уравнения на x^2:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x^2} \qquad (*)$$

Решение линейного уравнения можно найти с помощью подстановки $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - неизвестные функции.
Подставим y и y' в уравнение (*):

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{x} = \frac{\ln x}{x^2} \text{ или } u' \cdot v + u \cdot (v' + \frac{v}{x}) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Подберем функцию $v(x)$ такой, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль. Тогда последнее уравнение сведется к системе уравнений

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u' \cdot v = \dfrac{\ln x}{x^2}. \end{cases}$$

Каждое из уравнений в полученной системе будет дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Решением первое уравнение системы:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|,$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

Решим второе уравнение системы:

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x^2}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{\ln x}{x}, \quad \int du = \int \frac{\ln x}{x} dx, \quad u = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Тогда общее решение данного дифференциального уравнения будет:

$$y = u \cdot v = (\frac{\ln^2 x}{2} + C) \cdot \frac{1}{x}.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $xy' - y = y^2 \cdot \sin x$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли, т.к. его можно привести к виду $y' + p(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. Разделим обе части уравнения на x:

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2 \cdot \sin x}{x}.$$

Такое уравнение можно решить так же, как и линейное с помощью подстановки $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{u \cdot v}{x} = \frac{u^2 \cdot v^2 \cdot \sin x}{x}, \quad u' \cdot v + u \cdot (v' - \frac{v}{x}) = \frac{u^2 \cdot v^2 \cdot \sin x}{x},$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ u' \cdot v = \dfrac{u^2 \cdot v^2 \cdot \sin x}{x}. \end{cases}$$

Функцию $v(x)$ найдем из первого уравнения системы:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x|, \quad v = x.$$

Функцию $u(x)$ найдем из второго уравнения системы:

$$u' \cdot v = \frac{u^2 \cdot v^2 \cdot \sin x}{x}, \quad \frac{du}{u^2} = \sin x dx, \quad \int \frac{du}{u^2} = \int \sin x dx, \quad -\frac{1}{u} = -\cos x - C,$$

$$u = \frac{1}{\cos x + C}.$$

Значит, $y = uv = \frac{x}{\cos x + C}$ - общее решение уравнения Бернулли.

Пример 5. Решить уравнение $(2x - y^3) \cdot y' + y = 0$.
Решение. Известно, что дифференциальное уравнение $x' + p(y) \cdot x = Q(y)$ называется линейным относительно x и x', где $x = x(y)$, $x' = \frac{dx}{dy}$. Такое уравнение можно решить с помощью замены $x = u \cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ - две неизвестные функции от переменной y.
Преобразуем данное дифференциальное уравнение

$$(2x - y^3) \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Умножим обе части уравнения на $\frac{dx}{dy}$ и разделим на y:

$$2x - y^3 + y \cdot \frac{dx}{dy} = 0,\ \ 2x - y^3 + y \cdot x' = 0,\ \ \ x' + \frac{2x}{y} = y^2.$$

Это линейное дифференциальное уравнение. Сделаем замену $x = u \cdot v$, $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{2uv}{y} = y^2$, $u' \cdot v + u(v' + \frac{2v}{y}) = y^2$.

Перейдем к системе $\begin{cases} v' + \frac{2v}{y} = 0, \\ u' \cdot v = y^2. \end{cases}$ Решим первое уравнение системы:

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{2v}{y},\ \ \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2dy}{y},\ \ \ln|v| = -2\ln|y|,\ \ v = \frac{1}{y^2}.$$

Решим второе уравнение системы с учетом того, что $v = \frac{1}{y^2}$.

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{du}{dy} = y^2,\ \ du = y^4 dy,\ \ \int du = \int y^4 dy,\ \ u = \frac{y^5}{5} + C.$$

Тогда $x = uv = (\frac{y^5}{5} + C) \cdot \frac{1}{y^2}$ или $x = \frac{y^3}{5} + \frac{C}{y^2}$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

Задание №21

Найти: а) частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям; б-в) общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

501. а) $y''-7y'+12y=0;\quad y(0)=-3;\quad y'(0)=1;$

б) $y''+3y'+2y=3x^2-x;$

в) $y''-5y'+6y=3e^{3x};$

502. а) $y''-3y'=0;\quad y(0)=4;\quad y'(0)=2;$

б) $y''-3y'+2y=2\sin 2x;$

в) $y''-3y'-4y=2e^{-x};$

503. а) $y''+4y=0;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1;\quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-3;$

б) $y''-7y'+10y=3e^{-3x};$

в) $y''-3y'=24x-5;$

504. а) $y''+6y'+9y=0;\quad y(0)=5;\quad y'(0)=0;$

б) $y''-4y'+5y=x^2+2;$

в) $y''-6y'+8y=19e^{2x};$

505. а) $y''+3y'-4y=0;\quad y(0)=2;\quad y'(0)=-1;$

б) $y''-4y'+4y=\cos x;$

в) $y''+9y'=6x-1;$

506. а) $y''-2y'+10y=0;\quad y(\pi)=1;\quad y'(\pi)=2;$

б) $y''-y=2x^2+9;$

в) $y''-8y'+16y=-9e^{4x};$

507. а) $y''+8y'+16y=0;\quad y(0)=0;\quad y'(0)=4;$

б) $y''+y=-\sin 3x;$

в) $y''-2y'=5-8x;$

508. а) $y''-9y'+18y=0;\quad y(0)=-1;\quad y'(0)=-2;$

б) $y''-4y=5-2x+6x^2;$

в) $y''-y'-30y=4e^{-5x};$

509. а) $y''+25y=0;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0;\quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3;$

б) $y''-4y'-21y=-9e^{-2x};$

в) $y''-3y'=3x^2+x;$

510. а) $y''+4y'=0;\quad y(0)=-5;\quad y'(0)=6;$

б) $y''+16y=8x^2+5;$

в) $y''-6y'+9y=5e^{3x};$

511. а) $y''+7y'+10y=0;\quad y(0)=-2;\quad y'(0)=2;$

б) $y''+8y'+20y=4e^{x};$

в) $y''-4y'=15-84x^2;$

512. а) $y''+4y'+29y=0;\quad y(\pi)=1;\quad y'(\pi)=0;$

б) $y'' + 5y' = 4\cos 2x;$

в) $y'' - 4y' - 5y = 6e^{-x};$

513. а) $y'' - 6y' + 5y = 0; \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 0;$

б) $y'' - 4y' + 4y = 32e^{3x};$

в) $3y'' - y' = x - 3;$

514. а) $y'' + 2y' + y = 0; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 0;$

б) $y'' - 2y' + 2y = x^2 - 7x;$

в) $y'' - 12y' + 36y = 11e^{6x};$

515. а) $y'' - y' - 12y = 0; \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = 1;$

б) $y'' + y = 3\cos 2x - \sin 2x;$

в) $y'' + 7y' = 1 - 28x;$

516. а) $y'' + 16y = 0; \quad y(\pi) = 0; \quad y'(0) = -4;$

б) $y'' - 3y' - 18y = 6x^2;$

в) $y'' + 2y' = 6e^{-2x};$

517. а) $y'' - 7y' + 6y = 0; \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = 2;$

б) $y'' - 10y' + 29y = 7e^{-x};$

в) $y'' + y' = 3x^2 - 8;$

518. а) $y'' - 10y' + 25y = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = -2;$

б) $y'' - 3y' - 4y = 16\cos x;$

в) $y'' - 3y' + 2y = -5e^{x};$

519. а) $y'' + 2y' + 5y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2;$

б) $y'' - 9y = 7e^{-6x};$

в) $y'' + 5y' = 5x - 2;$

520. а) $y'' - 8y' + 7y = 0; \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = -2;$

б) $y'' + 4y = 2x^2 - 3;$

в) $y'' + 4y' + 4y = 7e^{-2x};$

521. а) $y'' + 8y' + 15y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1;$

б) $y'' + y' - 12y = 21e^{-7x};$

в) $y'' - y' = 6x + 11;$

522. а) $y'' - 4y' + 13y = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 0;$

б) $y'' + y' = 7\sin 5x;$

в) $y'' - 4y' + 4y = -6e^{2x};$

523. а) $y'' + 9y = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;$

б) $4y'' - 3y' - y = 5e^{3x};$

в) $y'' + 2y' = 16x;$

524. а) $y'' - 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 3;$

б) $y'' - 7y' + 12y = 6x^2 - x;$

в) $y'' + 5y' + 6y = -8e^{-3x};$

525. а) $y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 1;$

б) $y'' + 25y = 9\sin 2x - \cos 2x;$

в) $y'' - y' = 6x^2 - 1.$

Решение типовых примеров.

а) Найти частные решения следующих дифференциальных уравнений второго порядка при заданных начальных условиях:

1. $y'' + 2y' - 24y = 0; \quad y(0) = -3; \quad y'(0) = 5;$
2. $y'' - 12y' + 36y = 0; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 4;$
3. $y'' - 8y' + 25y = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 3.$

Решение.

1. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k - 24 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}.$$

Так как характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $k_1 = -6$, $k_2 = 4$, то общее решение этого дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{4x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Тогда

$$y' = -6C_1 e^{-6x} + 4C_2 e^{4x},$$

поэтому, основываясь на начальных условиях, получаем

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -3, \\ -6C_1 + 4C_2 = 5. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = -1{,}7$; $C_2 = -1{,}3$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = -1{,}7e^{-6x} - 1{,}3e^{4x}.$$

2. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 12k + 36 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Так как характеристическое уравнение имеет два равных корня $k_1 = k_2 = 6$, то общее решение соответствующего дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = e^{6x}(C_1 + C_2 x).$$

Тогда

$$y' = 6e^{6x}(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{6x}.$$

Учитывая начальные условия, получаем систему уравнений для определения C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 = -2, \\ 6C_1 + C_2 = 4. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = -2$; $C_2 = 16$. Таким образом, частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, приобретает вид

$$y = e^{6x}(16x - 2).$$

3. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 8k + 25 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i.$$

Так как корни комплексные и $\alpha = 4$, а $\beta = 3$, то общее решение записывается в виде

$$y = e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Отсюда

$$y' = 4e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{4x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x).$$

Подставив в выражения для y и y' начальные условия, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = -1, \\ 4e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0) = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -1, \\ 4C_1 + 3C_2 = 3. \end{cases}$$

Таким образом, $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{7}{3}$ и, следовательно, частное решение имеет вид

$$y = e^{4x}\left(\frac{7}{3}\sin 3x - \cos 3x\right).$$

б-в) Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - y' - 2y = e^{2x}$;
2. $y'' + y' = 2x + 3$;
3. $y'' + 2y' - 3y = 5\cos x + \sin x$.

Решение.

1. Общее решение уравнения находим по формуле

$$y = y_0 + \bar{y}.$$

Найдём y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения.

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

$$k^2 - k - 2 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -1, \text{ поэтому } y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Подбираем теперь частное решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$\bar{y} = Axe^{2x},$$

где A – неизвестный коэффициент.

Определим коэффициент A. Найдём производные

$$\bar{y}' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},$$

$$\bar{y}'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Поскольку $\bar{y}$ – решение данного уравнения, то, подставляя $\bar{y}$ $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в данное уравнение, получим равенство:

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - (Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) - 2Axe^{2x} = e^{2x}.$$

Сократив на e^{2x} и выполнив преобразования получим

$$3A = 1, \text{ откуда } A = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\bar{y} = \frac{1}{3} xe^{2x}$.

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} xe^{2x}.$$

2. Найдём y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + y' = 0.$$

$$k^2 + k = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -1.$$

Значит $y_0 = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Подбираем теперь частное решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$\bar{y} = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx.$$

Найдём неизвестные коэффициенты A и B.

$$\bar{y}' = 2Ax + B, \quad \bar{y}'' = 2A.$$

Подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в исходное уравнение, получаем

$$2A + 2Ax + B = 2x + 3.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} при\ x & 2A = 2, \\ при\ x^0 & 2A + B = 3, \end{array}\right\} \text{ откуда } \begin{cases} A = 1, \\ B = 1. \end{cases}$$

Таким образом $\bar{y} = x^2 + x$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 + x.$$

3. Общее решение заданного уравнения находим по формуле

$$y = y_0 + \bar{y}.$$

Запишем характеристическое уравнение и найдём его корни.

$$k^2 + 2k - 3 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}.$$

Так как $k_1 = -3,\ k_2 = 1$, то $y_0 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$.

Подбираем теперь частное решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x.$$

Определим значения неизвестных коэффициентов *A* и *B*. Найдём производные

$$\bar{y}' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$\bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставляя $\bar{y}$ $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в уравнение, получим

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) - 3(A\cos x + B\sin x) = 5\cos x + \sin x,$$

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - 3A\cos x - 3B\sin x = 5\cos x + \sin x.$$

Приведя подобные слагаемые, получим равенство

$$-4A\cos x - 4B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x = 5\cos x + \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получим
при $\cos x: -4A + 2B = 5,$
при $\sin x: -4B - 2A = 1;$

$$\begin{cases} -4A + 2B = 5, \\ -2A - 4B = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -4A + 2B = 5, \\ 4A + 8B = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 10B = 3, \\ 4A = 2B - 5. \end{cases}$$

Таким образом, $A = -1{,}1;\quad B = 0{,}3.$

Значит $\bar{y} = 0{,}3\sin x - 1{,}1\cos x$. Следовательно, общее решение заданного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + 0{,}3\sin x - 1{,}1\cos x.$$

Задание №22

а) исследовать на сходимость с помощью признака сравнения знакоположительный ряд; б) исследовать на сходимость с помощью признака Даламбера знакоположительный ряд; в) исследовать на сходимость с помощью признака Лейбница знакочередующийся ряд; г) найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

	а)	б)	в)	г)
526.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^2(n-1)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{(2n)!(n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{4n-3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n}}{9^n (2n-1)}$

527. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{4n^3-2}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(n-1)!(2n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$

528. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{4+9n^2}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n)!}{(3n+1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+5}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n+1}}{4^n(3n-1)}$

529. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+4n^3}}{2n^3+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(n-2)!}{(2n+3)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(5n+3)}{2n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{4^n(n+1)^2}$

530. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+3n}{1+9n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n+1)!(2n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{n^2+2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^n}{3^{n-1}}$

531. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{3n^2+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(2n-1)!}{(3n-2)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{n^3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^{n+1}}{2^n}$

532. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}(2n-1)}{n+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{\sqrt{n}}$

533. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+5}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{5n-1}}{n\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{n\sqrt{n}3^n}$

534. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{2n^3+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+1)^n}{n(n+1)}$

535. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^3+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n+1)!(2n)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}n}{2n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{16^n(2n-1)}$

536. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{\sqrt{4+n^6}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{5n+1}}{\sqrt{n^3}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{n}$

537. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9+16n^3}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)3^n}$

538. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^5+2}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!(2n)!}{(3n-1)!}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(5n+3)}{3n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{(2n-1)^2}$

539. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n\sqrt{9n+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!}{(n-1)!n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+3}(x-3)^n}{5^{n+2}}$

540.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n^3+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!}{(n+2)!(2n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{n^3+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^2\cdot 4^n}$
541.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+9}}{2n^3+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(2n-1)}{(2n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x+3)^{2n}}{3n+2}$
542.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{n^2+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(2n+1)!\,n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x+5)^{n-1}}{7^n\sqrt{2n+1}}$
543.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+5n}{n\sqrt{n+3}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n+2)!(n-1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{9n^2+4}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^{n+1}}$
544.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+6}}{n^3+2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^2}{(2n-1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}(2n-1)}{n+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-4)^{2n}}{4^n(3n-1)}$
545.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2n}{10n^2-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!n!}{(2n-1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-1)^n}{(2n+1)^2}$
546.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n^5+3}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-3)!}{(n+1)!(3n-1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{\sqrt{n+3}\cdot 3^n}$
547.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+2n}{n^2+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(2n-1)!}{(3n-2)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$
548.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}}{2n^2+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-1)!}{(2n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{4n+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-7)^n}{6^{n+1}}$
549.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2+7}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{(n!)^2(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{(2n+1)3^{n+1}}$
550.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{n^3+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+3)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{2n}}{3n-1}$

Решение типовых примеров.

а) Исследовать на сходимость с помощью признака сравнения ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{2n^3+5}.$$

Решение. Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится, так как степень p=2>1. Общие члены этих рядов $u_n=\frac{\sqrt{n^2+3}}{2n^3+5}$, $v_n=\frac{1}{n^2}$.

В соответствии с признаком сравнения вычислим предел.

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{2n^3+5}\cdot\frac{n^2}{1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^2}{2n^3}=\frac{1}{2}.$$

Так как d конечное число и d≠0, то оба ряда одновременно сходятся.

б) Исследовать на сходимость с помощью признака Даламбера знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{(2n-1)!\,n!}$.

Решение. Общий член ряда $u_n=\frac{(3n+1)!}{(2n-1)!\,n!}$.

Тогда $u_{n+1}=\frac{(3(n+1)+1)!}{(2(n+1)-1)!\,(n+1)!}=\frac{(3n+4)!}{(2n+1)!\,(n+1)!}$.

В соответствии с признаком Даламбера вычислим предел

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)!}{(2n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!\,n!}{(3n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}{2n\cdot(2n+1)(n+1)}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\cdot 3n\cdot 3n}{2n\cdot 2n\cdot n}=\frac{27}{4}.$$

Так как d>1, то заданный ряд расходится.

в) С помощью признака Лейбница исследовать сходимость знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$.

Решение. Рассмотрим абсолютные величины членов исходного ряда

$$u_n=\frac{1}{5n-1}$$

Очевидно, что u_n убывает с ростом n. Кроме того $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5n-1}=0$

Выполнены оба условия признака Лейбница, т.е. ряд сходится.

г) Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{7^n n^2}$ и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение. Общий член ряда $u_n = \frac{(x+3)^n}{7^n n^2}$. Применим признак Даламбера.

$$d = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^{n+1}}{7^{n+1}(n+1)^2}\cdot\frac{7^n n^2}{(x+3)^n}\right| = \frac{|x+3|}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{|x+3|}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2} = \frac{|x+3|}{7}.$$

Таким образом, при $\frac{|x+3|}{7} < 1$, т.е. при –10<x<4 исходный ряд сходится абсолютно. Выясним вопрос о сходимости ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках x= – 10, x=4.

При x= -10 заданный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-7)^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Это знакочередующийся ряд. Его общий член по абсолютной величине убывает и стремиться к нулю при $n\to\infty$. Таким образом, ряд сходится по признаку Лейбница.

При x=4 исходный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Этот знакоположительный ряд сходится, так как степень p=2>1.
Таким образом, область сходимости исходного степенного ряда $-10 \le x \le 4$.

Задание №23

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подинтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда.

551. $\int_0^{1/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$

552. $\int_0^{1/3} e^{-x^3}x\,dx$

553. $\int_0^{1/2}\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$

554. $\int_0^{1/2} x\cos\sqrt{x}\,dx$

555. $\int_0^{1/2} x\ln(1+x^2)\,dx$

564. $\int_0^{1/2} xe^{-x^3}dx$

565. $\int_0^{1/2}\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$

566. $\int_0^{1} x\sin x^2\,dx$

567. $\int_0^{1/2} x^2\cos\sqrt{x}\,dx$

568. $\int_0^{1/3}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$

556. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx$

557. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

558. $\int\limits_0^{1/2} x^2 e^{-x^4} dx$

559. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

560. $\int\limits_0^{1/2} x\cos\sqrt{x^3} dx$

561. $\int\limits_0^{1/3} x\ln(1+x) dx$

562. $\int\limits_0^{1/5} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

563. $\int\limits_0^{1/3} \sqrt{1+x^3} dx$

569. $\int\limits_0^{1/6} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} dx$

570. $\int\limits_0^{1/3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$

571. $\int\limits_0^{1/2} x e^{-x^4} dx$

572. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x^2}{x^2} dx$

573. $\int\limits_0^{1} x^2 \cos x^2 dx$

574. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^2} dx$

575. $\int\limits_0^{1/3} \sqrt{x^3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$

Решение типового примера. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл $\int\limits_0^{1/2} x^2 e^{-x^2} dx$ путем предварительного разложения подинтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

Решение. В разложении функции e^x в степенной ряд $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

заменим x на ($-x^2$). Тогда получим $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$

Следовательно

$$\int\limits_0^{1/2} x^2 e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{1/2} \left(x^2 - \frac{x^4}{1!} + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^8}{3!} + \ldots \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{1! \cdot 5} + \frac{x^7}{2! \cdot 7} - \ldots \right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{160} + \frac{1}{1792} - \ldots$$

Полученный знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Третий член этого ряда по абсолютной величине меньше 0,001, поэтому для обеспечения требуемой точности нужно просуммировать первые два члена ряда.

Итак. $\int\limits_0^{1/2} x^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{24} - \frac{1}{160} = 0{,}048.$

Задание №24

Вычислить повторный интеграл и изменить порядок интегрирования

576. $\int\limits_{-2}^{4} dx \int\limits_{-1}^{x+2} 4xdy$

577. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{y^2+1} 2xydx$

578. $\int\limits_{-2}^{3} dy \int\limits_{-1}^{5-y} 2ydx$

579. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{\frac{4}{9}x^2}^{x+1} 6xdy$

580. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-x^2}^{3} 4xydy$

581. $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{y} 6ydx$

582. $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{-2}^{y^2} 2xydx$

583. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2-3}^{2x-3} 4xdy$

584. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{4-y} 6xydx$

585. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+4} 2xdy$

586. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} 4xydy$

589. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{4-x^2}^{6-x} 2xdy$

590. $\int\limits_{0}^{8} dx \int\limits_{-1}^{\sqrt{2x}} 2ydy$

591. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} 2xydx$

592. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{\frac{4}{x}}^{-x} xdy$

593. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-2x}^{x^2} (3x + 2y)dy$

594. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\frac{1}{2}y}^{\frac{1}{4}y^2} (8x + 2y)dx$

595. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{4+y}} xdx$

596. $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{4-2x}^{x+1} (x + 2y)dy$

597. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{2+x} ydy$

598. $\int\limits_{-4}^{1} dy \int\limits_{y^2-4}^{-3y} ydx$

599. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{2x-1}^{x+1} xdy$

587. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{-y}} 2x dx$

600. $\int\limits_{-3}^{-1} dy \int\limits_{-2-y}^{-\frac{3}{y}} 4x dx$

588. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{-y}^{y^3} 6y^2 dx$

Решение типового примера.

Вычислить повторный интеграл $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x-2}^{x} xy dy$ и изменить порядок интегрирования.

Решение.

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x-2}^{x} xydy = \int\limits_0^2 dx \left(\frac{xy^2}{2} \right) \Bigg|_{x-2}^{x} = \int\limits_0^2 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x(x-2)^2}{2} \right) dx = \int\limits_0^2 \left(2x^2 - 2x \right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - x^2 \right) \Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

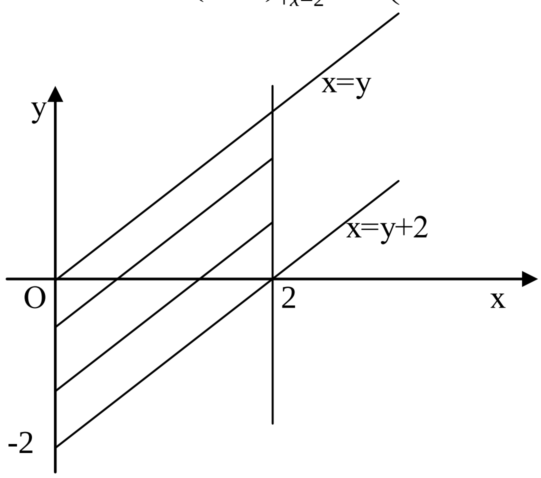


Рисунок 10

Чтобы изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, изобразим область интегрирования, учитывая, что она ограничена прямыми x=0, x=2, y=x-2, y=x.

Тогда

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x-2}^{x} xydy = \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+2} xydx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} xydx.$$

Задание № 25

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

601. $y^3 = x,\ x + y + 2 = 0,\ y + 2x = 0$.

602. $y = x^2 + 1,\ x + y = 3$.

603. $xy = 4,\ x + y = 5$.

604. $y^2 = 4 + x,\ x + 3y = 0$.

605. $x = 2y^2,\ x = y + 3$.

606. $y = \sqrt{x},\ 2y + x = 0,\ x + y = 2$.

607. $y = 2x,\ y = x,\ x + y = 6$.

608. $y = \sqrt{x},\ y = -x,\ y = x - 2$.

609. $y = -2x,\ 2y = x,\ x + y = 3$.

610. $y = -\sqrt{x}$, $y = x - 6$, $2y = x$.

611. $x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt{8 - y}$, $y = -2x$.

612. $y = e^{2x}$, $y = e^{-x}$, $y = e$.

613. $x = \sqrt{y}$, $2x + y = 8$, $x + y = 0$.

614. $y = \sqrt{x + 4}$, $x + y + 4 = 0$, $y = x - 2$.

615. $xy = 4$, $y = 4x$, $y = x$.

616. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3x}$, $x + y = 6$.

617. $y = x^3$, $x + y = 2$, $2y + x = 0$.

618. $y = \sqrt{x}$, $x = \sqrt{-y}$, $x = y + 2$.

619. $4y = x^2$, $y = 4x^2$, $x = \sqrt{5 - y}$.

620. $x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt{2 - y}$, $y = x + 2$.

621. $y = x + 2$, $x = \sqrt{y}$, $x + y = 0$.

622. $xy = 2$, $y = 4$, $x = 2\sqrt{y}$.

623. $y = -\sqrt{-x}$, $y = 0$, $x + y + 6 = 0$.

624. $y = -x$, $y = -\dfrac{4}{x}$, $y = 0$, $x = 4$.

625. $x = -\sqrt{y}$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$.

Решение типового примера.

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = -\dfrac{x}{2}$, $y = 4 - x$.

Решение. Площадь области D находится по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

В нашем примере область D имеет вид (рисунок 11):

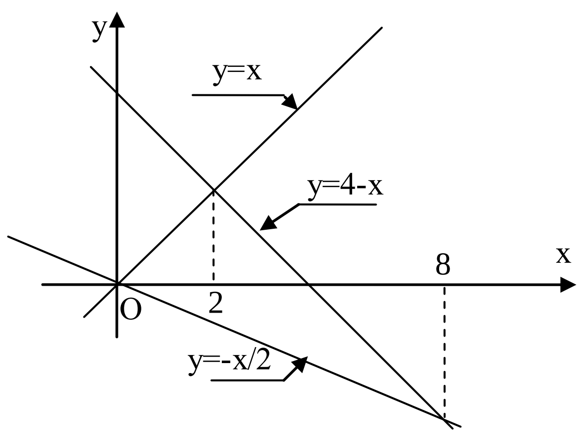


Рисунок 11

Поэтому

$$S=\int_0^2 dx\int_{-\frac{x}{2}}^{x}dy+\int_2^8 dx\int_{-\frac{x}{2}}^{4-x}dy=\int_0^2 dxy\Big|_{-\frac{x}{2}}^{x}+\int_2^8 dxy\Big|_{-\frac{x}{2}}^{4-x}=\int_0^2\left(x+\frac{x}{2}\right)dx+\int_2^8\left(4-x+\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{3x^2}{4}\Big|_0^2+\left(4x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_2^8=12.$$

Задание №26

В задачах 601-613 установить независимость от пути интегрирования и вычислить криволинейный интеграл $\int P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ по контуру, связывающему точки $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

626. $P(x,y)=x^3-2y$; $Q(x,y)=-2x+5$; $M(0;1)$, $N(1;2)$.

627. $P(x,y)=1+2xy$; $Q(x,y)=x^2+y$; $M(0;-1)$, $N(1;1)$.

628. $P(x,y)=x^2-y$; $Q(x,y)=-x+3y$; $M(-1;0)$, $N(0;2)$.

629. $P(x,y)=3+xy$; $Q(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2y$; $M(-2;1)$, $N(-1;2)$.

630. $P(x,y)=5x-2y$; $Q(x,y)=-2x+y$; $M(-2;-1)$, $N(0;3)$.

631. $P(x,y)=3x^2-y$; $Q(x,y)=-x-3y$; $M(-2;-1)$, $N(-1;1)$.

632. $P(x,y)=4xy+3$; $Q(x,y)=2x^2-y$; $M(1;1)$, $N(2;4)$.

633. $P(x,y)=4+xy^2$; $Q(x,y)=x^2y+2y$; $M(2;0)$, $N(3;5)$.

634. $P(x,y)=2xy+8$; $Q(x,y)=x^2+2y$; $M(-3;1)$, $N(0;6)$.

635. $P(x,y)=5x^2-3y$; $Q(x,y)=y^2-3x$; $M(-4;2)$, $N(1;4)$.

636. $P(x,y)=6x^2+5y$; $Q(x,y)=5x+2y^2$; $M(-5;0)$, $N(1;3)$.

637. $P(x,y)=10xy+x^2$; $Q(x,y)=5x^2-y$; $M(-5;1)$, $N(2;4)$.

638. $P(x,y)=2x^2y-1$; $Q(x,y)=\frac{2}{3}x^3-1$; $M(-6;1)$, $N(-3;4)$.

Решение типового примера. Вычислим криволинейный интеграл $L=\int(x^2+3xy)dx+\left(\frac{3}{2}x^2+y\right)dy$ по контуру, соединяющему точки M(1;1) и N(2;3), предварительно убедившись в независимости его от пути интегрирования. В данном случае выполнено условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, где $P=x^2+3xy,\quad Q=\frac{3}{2}x^2+y$. Действительно,

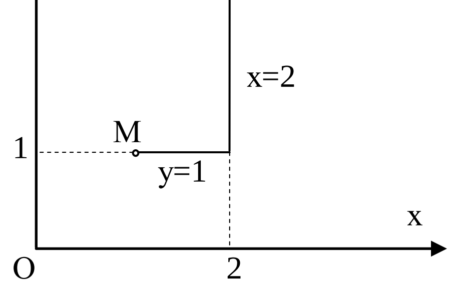


Рисунок 12

$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x$. Выберем в качестве контура интегрирования наиболее простой контур, связывающий точки M и N , например, ломаную, звенья которой параллельны осям координат (рисунок 12). Имеем на первом участке: y=1, dy=0, $1 \le x \le 2$; на втором участке x=2, dx=0, $1 \le y \le 3$. Таким образом,

$$L = \int_1^2 \left(x^2 + 3x\right)dx + \int_1^3 (6 + y)dy = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 + \left(6y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = 22\frac{5}{6}$$

В задачах 614-625 вычислить криволинейный интеграл $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где L – треугольник ABC, пробегаемый по ходу часовой стрелки.

639. $P(x,y) = 2x + 3y$; $Q(x,y) = 2y - x$; $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$.
640. $P(x,y) = 3x + y$; $Q(x,y) = 4y + 2x$; $A(0;0)$, $B(0;2)$, $C(2;2)$.
641. $P(x,y) = x - 4y$; $Q(x,y) = 2y - 3x$; $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$.
642. $P(x,y) = 4x + y$; $Q(x,y) = 3x - y$; $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(3;3)$.
643. $P(x,y) = -2x - 3y$; $Q(x,y) = -4x + 5y$; $A(0;0)$, $B(-1;0)$, $C(-1;-1)$.
644. $P(x,y) = -5y + x$; $Q(x,y) = -y - 5x$; $A(0;0)$, $B(-3;0)$, $C(-3;-3)$.
645. $P(x,y) = xy + 1$; $Q(x,y) = 4x - 2y$; $A(0;0)$, $B(0;-2)$, $C(-2;-2)$.
646. $P(x,y) = 2x - 3xy$; $Q(x,y) = 2y - 10x$; $A(0;0)$, $B(0;-3)$, $C(-3;-3)$.
647. $P(x,y) = (2 - 4xy)$; $Q(x,y) = 5xy + 2$; $A(0;0)$, $B(-2;0)$, $C(-2;2)$.
648. $P(x,y) = 5 - xy$; $Q(x,y) = -7x - 2y$; $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;1)$.
649. $P(x,y) = x - y$; $Q(x,y) = xy - 4$; $A(0;0)$, $B(0;-3)$, $C(3;-3)$.
650. $P(x,y) = 2x - 8y$; $Q(x,y) = 7x + y$; $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;-2)$.

Решение типового примера.

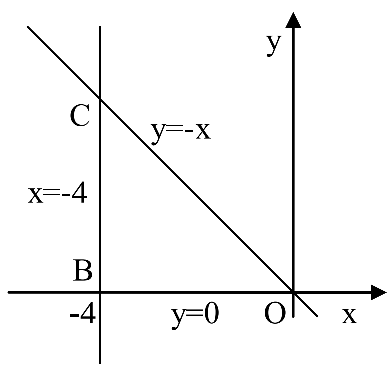


Рисунок 13

Вычислим криволинейный интеграл $Z = \int_L \left(2x - 96y\right)dx + 3xydy$, где L – треугольник OBC, пробегаемый по ходу часовой стрелки, причем O(0,0), B(-4,0), C(-4,4) (рисунок 13). Треугольник OBC разобьем на три участка: OB, BC, CO.

На первом участке: y=0, dy=0, $-4 \le x \le 0$;
На втором участке: x=-4, dx=0, $0 \le y \le 4$;
На третьем участке: y=-x, dy=- dx, $-4 \le x \le 0$.
Таким образом,

$$Z=\int_0^{-4}2xdx+\int_0^{4}(-12y)dy+\int_{-4}^{0}(2x+9x)dx+3x^2dx=x^2\Big|_0^{-4}-6y^2\Big|_0^{4}+\left(\frac{11x^2}{2}+x^3\right)\Bigg|_{-4}^{0}=-104$$

Задание №27

Найти вероятность указанных событий, пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей.

651. а) В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлечённых 2-х деталей есть хотя бы одна стандартная.

б) Три орудия ведут огонь по цели. Вероятность попадания в цель из первого орудия равна 0,7; из второго – 0,9; из третьего – 0,6. Каждое орудие стреляет один раз. Найти вероятность того, что два орудия попадут в цель.

652. а) В урне 8 белых шаров и 4 чёрных шара. Найти вероятность того, что среди 5 отобранных наудачу шаров окажется не более одного чёрного шара.

б) Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,3, для второго – 0,4. Найти вероятность того, что в течение смены только один станок выйдет из строя.

653. а) На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 8 учебников, причём 3 из них в переплёте. Библиотекарь берёт наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплёте.

б) В урне 12 шаров, из них 8 белых. Найти вероятность того, что среди двух наудачу извлечённых шаров только один белый.

654. а) В лотерее 20 билетов, из них 4 выигрышных. Найти вероятность того, что из трёх взятых билетов хотя бы один выигрышный.

б) Электрическая цепь состоит из трёх последовательно соединенных элементов, которые выходят из строя с вероятностью соответственно 0,2; 0,4 и 0,1. Найти вероятность того, что разрыва цепи не будет.

655. а) Из колоды карт (36 штук) наудачу взяты четыре карты. Найти вероятность того, что все они окажутся одной масти.

б) Четыре электролампы соединены последовательно. Вероятность выхода из строя для каждой из них равна 0,1. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

656. а) В одном ящике – 15 деталей, из них 12 стандартных, в другом – 20 деталей, из них 13 стандартных. Взяли по одной детали из каждого ящика. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется стандартной.

б) Вероятность того, что изделие высшего сорта, равна 0,7. Найти вероятность того, что из двух изделий только одно будет высшего сорта.

657. а) Студент знает ответ на 25 вопросов из 40 вопросов программы. Найти вероятность того, что он знает ответ на оба предложенных ему вопроса.

б) Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,95; второе – 0,9; третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает только одно устройство.

658. а) Устройство состоит из 3 элементов, работающих независимо. Вероятность безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно будут работать все 3 элемента.

б) В группе из 22 студентов имеется 4 отличника. Выбираются наудачу три студента. Какова вероятность того, что среди них 2 отличника?

659. а) Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что на каждой из выпавших граней появится 5 очков.

б) Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить 4 бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

660. а) В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

б) Три исследователя независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

661. а) В ящике 9 иногородних и 4 местных письма. Найти вероятность того, что два вынутых наудачу письма иногородние.

б) В первом ящике 8 белых и 10 чёрных шаров. Во втором ящике 12 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика наудачу вынули по одному шару. Какова вероятность того, что шары разного цвета?

662. а) Из тридцати рабочих норму выработки не выполняют 6 человек. Найти вероятность того, что из двух случайно выбранных рабочих только один не выполнит норму.

б) Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят 1-ый вызов, равна 0,2; 2-ой – 0,3; 3-ий – 0,4. События, состоящие в том, что любой вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов.

663. а) Институтская команда по шахматам имеет в своём составе 2 кандидата в мастера спорта и 4 перворазрядника. Для участия в следующем туре соревнований случайным образом отобрано 3 спортсмена. Найти вероятность того, что все они перворазрядники.

б) Вероятность того, что каждый из трёх друзей придёт в условленное место, соответственно равны: p_1=0,8; p_2=0,4; p_3=0,7. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться двум из трёх друзей.

664. а) Автопарк некоторого предприятия имеет в своём распоряжении 2 «Икаруса» и 5 «ЛАЗов». Для поездки сотрудников к морю случайным образом было выбрано 2 автобуса. Найти вероятность того, что это «Икарусы».

б) Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что хотя бы на одной из костей выпадет 6 очков?

665. а) Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на 8 вопросов из 30, которые могут быть предложены. Какова вероятность того, что студент сдаст коллоквиум?

б) Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,92; второе – 0,85; третье – 0,8. Найти вероятность того, что при аварии сработают два устройства.

666. а) Партия семян, состоящая из 10 мешков, подлежит приёмке, если при проверке наугад выбранных двух мешков окажется, что содержащиеся в них семена удовлетворяют стандарту. Найти вероятность приёмки партии, содержащей в 4 мешках нестандартные семена.

б) На предприятии имеется 3 автомобиля. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,9; второго – 0,7; третьего – 0,8. Найти вероятность того, что только два автомобиля проработают безотказно в течение определённого времени.

667. а) В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов приходится 12 денежных и 8 вещевых выигрышей. Какова вероятность выигрыша хотя бы на один из трёх приобретённых билетов?

б) Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,7; для второго – 0,6; для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично» не более чем одним из студентов.

668. а) В урне 10 красных, 5 зелёных и 3 чёрных шара. Определить вероятность того, что взятые наудачу два шара будут одного цвета.

б) Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,6; для второго – 0,8; для третьего – 0,3. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично» хотя бы одним из них?

669. а) На базу поступило 40 ящиков овощей, из них 30 первого сорта, остальные второго. Наудачу для проверки берут два ящика. Какова вероятность того, что они содержат овощи разного сорта?

б) Первый студент из 20 вопросов программы выучил 17, второй – 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Определить вероятность того, что хотя бы один ответит верно.

670. а) В первой бригаде 6 тракторов, во второй – 9. В каждой бригаде 1 трактор требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Какова вероятность того, что оба трактора исправны?

б) Из урны, содержащей 4 красных и 6 чёрных шаров, вынимают 2 шара (без возвращения первого). Какова вероятность того, что будут вынуты шары разного цвета?

671. а) Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Приобретено три билета. Какова вероятность выиграть хотя бы по одному из них?

б) В первой урне 5 красных, 3 белых и 2 чёрных шара. Во второй 3 белых и 2 чёрных шара. Из первой урны взято 2 шара, а из второй один. Определить вероятность того, что все шары одного цвета.

672. а) В первом ящике 1 белый, 2 красных и 3 синих шара; во втором ящике 2 белых, 6 красных, 4 синих. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих?

б) Вероятность того, что в течение дня произойдёт неполадка станка, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение четырёх дней подряд не произойдёт ни одной неполадки?

673. а) В магазин вошли 3 покупателя. Вероятность покупки для каждого из них равна 0,3. Найти вероятность того, что два из них совершат покупки.

б) Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии – 0,2; на втором – 0,35; на третьем – 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды хотя бы на одном предприятии.

674. а) Читатель в поисках нужной книги обходит три библиотеки. Вероятность того, что она имеется в очередной библиотеке, равна 0,25. Найти вероятность того, что читатель найдёт книгу хотя бы в одной из них.

б) В группе студентов, состоящей из 18 человек, 7 юношей и 11 девушек. Для участия в конференции случайным образом отобрано двое студентов. Какова вероятность того, что среди них будет один юноша и одна девушка?

675. а) Вероятность выхода из строя станка в течении одного рабочего дня равна 0,05. Найти вероятность того, что за четыре рабочих дня станок ни разу не выйдет из строя.

б) В ящике 15 деталей, из них 3 бракованные. Наудачу из ящика вынули три детали. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна бракованная.

Решение типовых примеров.

Пример 1. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определённого товара по телевидению, равна 0,08. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же товара на рекламном щите, равна 0,04. Предполагается, что оба события независимые. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит только одну из двух реклам.

Решение.

Рассмотрим события: A – потребитель увидит рекламу товара по телевидению;

B – потребитель увидит рекламу товара на рекламном щите.

По условию $P(A) = 0{,}08$; $P(B) = 0{,}04$.

Пусть событие C – потребитель увидит только одну рекламу из двух реклам. Тогда

$$C = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B.$$

Пользуясь несовместностью событий-слагаемых и независимостью событий-сомножителей, получим

$$P(C) = P(A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B),$$

$$P(C) = 0{,}08 \cdot 0{,}96 + 0{,}92 \cdot 0{,}04 = 0{,}0768 + 0{,}0368 = 0{,}1136.$$

Пример 2. В урне 10 белых и 4 чёрных шара. Из урны один за другим вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые, если вынутые шары в урну не возвращались.

Решение.

Рассмотрим события: A – первый шар белый;

B – второй шар белый.

В данном случае события A и B зависимые, так как вероятность появления белого шара при втором извлечении зависит от того, был ли раньше извлечён белый шар. Рассмотрим событие C – оба шара белые. Тогда $C = A \cdot B$.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий

$$P(C) = P(A) \cdot P(B/A),$$

$$P(A) = \frac{6}{10}, \quad P(B/A) = \frac{5}{9},$$

$$P(C) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

Задание №28

Найти вероятность указанных событий, пользуясь формулой Бернулли или теоремами Лапласа.

676. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он включён в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент включено 4 мотора.

677. Произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,8. Найти вероятность того, что событие А появится более трёх раз.

678. Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что число «3» появится 2 раза.

679. В партии 70% цветных катушек ниток. Какова вероятность того, что среди четырёх наудачу взятых катушек 3 с цветными нитками?

680. Орудие сделало 8 выстрелов по цели. Вероятность попадания по цели при каждом выстреле равна 1/3. Найти вероятность 5 попаданий.

681. Вероятность того, что холодильник потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 5 холодильников потребуют ремонта 2.

682. В телестудии 5 телекамер. Вероятность того, что телекамера в данный момент включена (для каждой из них), равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включено четыре телекамеры.

683. Вероятность того, что в течение данного времени ёлочная гирлянда перегорит, равна 1/8. Найти вероятность того, что в течение данного времени из 6 ёлочных гирлянд 2 перегорят.

684. В водоёме карпы составляют 70%. Найти вероятность того, что из 5 выловленных в этом водоёме рыб окажется не менее 4-х карпов.

685. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из 4 посеянных семян взойдёт не менее 3.

686. В хлопке число длинных волокон составляет 80%. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 волокон окажется одно длинное.

687. Вероятность попадания стрелком в цель равна 3/4. Сделано 6 выстрелов. Определить вероятность пяти попаданий.

688. Вероятность того, что машина, взятая напрокат, будет возвращена исправной, равна 0,8. Какова вероятность того, что из 4 возвращённых машин 3 окажутся исправными?

689. На тракторном заводе рабочий за смену изготовляет 225 деталей. Вероятность того, что деталь окажется первого сорта, равна 0,8. Какова вероятность того, что деталей первого сорта будет ровно 165 штук.

690. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

691. Вероятность появления события А в каждом из 300 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие А появится не менее 210 раз и не более 225 раз.

692. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 200 веточек роз 104 веточки окажутся красными розами, если в общей корзине красных – 60%.

693. Вероятность положительного результата при химическом анализе равна 0,8. Найти вероятность получения 85 положительных исходов при 100 анализах.

694. При автоматической прессовке карболитовых болванок 4/5 от общего числа не имеют дефектов. Какова вероятность того, что из 600 взятых наудачу болванок без дефектов окажется не менее 490 и не более 510?

695. Баскетболист забрасывает мяч в корзину в среднем в 8 случаях из 10. Найти вероятность того, что будет не менее 110 и не более 115 попаданий, если выполнено 150 бросков.

696. Известно, что 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных специалистов высшее образование имеет: а) не менее 70; б) от 65 до 90 человек.

697. Всхожесть зерна, хранящегося на складе, равна 80%. Какова вероятность того, что среди 100 зёрен: а) число всхожих составит от 68 до 90 шт.?

698. В автопарке имеется 400 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,9. Определить вероятность того, что в определённый момент времени безотказно работающих машин будет от 345 до 370 штук.

699. Вероятность поражения куста виноградника равна 0,15. Найти вероятность того, что среди 400 обследованных кустов винограда будет 360 не повреждённых.
700. Санитарная служба проверяет качество питьевой воды. Вероятность того, что качество воды удовлетворяет стандарту, равна 0,75. Найти вероятность того, что в 240 пробах вода удовлетворила стандарту не менее 180 раз и не более 190.

Решение типовых примеров.

Пример 1. Вероятность перерасхода горючего одним автомобилем в день равна 0,1. Найти вероятность того, что из четырёх машин автобазы две машины превысят норму расхода горючего;

Решение. Здесь $n=4$, $p=0{,}1$, $q=0{,}9$.

Пусть событие А – две машины превысят норму расхода горючего. По формуле Бернулли для $k=2$ имеем

$$P(A)=P_4(2)=C_4^2\cdot p^2\cdot q^2=\frac{4!}{2!2!}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^2=0{,}0486.$$

Пример 2. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажутся не проверенными 104 детали.

Решение. Воспользуемся локальной теоремой Лапласа.

Здесь n=400, p=0,2, q=0,8, $k=104$.

$$P_{400}(104)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\cdot\varphi(x)=\frac{1}{8}\varphi(x).$$

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{104-400\cdot 0{,}2}{8}=\frac{24}{8}=3,\text{ отсюда}$$

$$P_{400}(104)\approx\frac{1}{8}\varphi(3)=\frac{0{,}0044}{8}\approx 0{,}0006.$$

Пример 3. Анализ работы крупного торгового центра выявил, что 40% холодильников ежегодно продаются в кредит. Найти вероятность того, что из 300 холодильников, проданных в течение года, в кредит продано от 110 до 140 холодильников.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа.

Здесь n=300, p=0,4, q=0,6, $k_1=110$, $k_2=140$.

$$P_{300}(110\le k\le 140)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1).$$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{110-300\cdot 0{,}4}{\sqrt{72}}\approx -1{,}18,\ x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{140-300\cdot 0{,}4}{\sqrt{72}}\approx 2{,}36,$$

тогда

$$P_{300}(110\le k\le 140)=\Phi(2{,}36)-\Phi(-1{,}18)=\Phi(2{,}36)+\Phi(1{,}18)=0{,}4909+0{,}3810=$$
$$=0{,}8719.$$

Задание №29

Дискретная случайная величина *X* задана своим законом распределения. Найти числовые характеристики заданной случайной величины.

701	*X*	-3	0	2	7
	P	0,1	0,6	0,2	0,1

702	*X*	-4	-2	-1	3
	P	0,1	0,3	0,2	0,4

703	*X*	**-1**	**-2**	**4**	**8**
	P	**0,2**	**0,5**	**0,1**	**0,2**

704	*X*	-2	1	3	8
	P	0,1	0,1	0,3	0,5

705	*X*	-5	2	3	4
	P	0,2	0,3	0,3	0,2

706	*X*	-4	-2	0	2
	P	0,2	0,3	0,4	0,1

707	*X*	-3	1	3	5
	P	0,4	0,1	0,2	0,3

708	*X*	1	3	6	8
	P	0,3	0,4	0,1	0,2

709	*X*	-4	-2	1	5
	P	0,1	0,5	0,3	0,1

710	*X*	-5	2	3	4
	P	0,4	0,3	0,1	0,2

711	*X*	-1	1	2	3
	P	0,3	0,1	0,2	0,4

712	*X*	-2	0	3	5
	P	0,1	0,3	0,4	0,2

713	*X*	-6	-2	3	5
	P	0,1	0,1	0,6	0,2

714	*X*	-7	0	1	4
	P	0,5	0,1	0,3	0,1

715

X	-5	-4	-2	3
P	0,2	0,2	0,5	0,1

716

X	-2	-1	1	5
P	0,1	0,2	0,3	0,4

717

X	3	4	6	9
P	0,5	0,2	0,2	0,1

718

X	-4	-2	-1	3
P	0,1	0,3	0,2	0,4

719

X	-2	0	1	4
P	0,4	0,1	0,3	0,2

720

X	-6	-4	-1	2
P	0,3	0,3	0,2	0,2

721

X	1	2	3	6
P	0,2	0,5	0,1	0,2

722

X	-4	-1	3	8
P	0,1	0,6	0,2	0,1

723

X	-5	-1	1	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

724

X	-1	2	3	5
P	0,1	0,5	0,2	0,2

725

X	-3	2	4	6
P	0,3	0,2	0,2	0,3

Решение типового примера.

Задан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти её числовые характеристики.

X	-3	0	2	7
P	0,1	0,6	0,2	0,1

Решение. Найдём математическое ожидание случайной величины X.

$$M(X) = -3\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}2 + 7\cdot 0{,}1 = -0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}7 = 0{,}8.$$

Вычислим математическое ожидание для случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 9\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}6 + 4\cdot 0{,}2 + 49\cdot 0{,}1 = 0{,}9 + 0{,}8 + 4{,}9 = 6{,}6\,.$$

Отсюда

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 6{,}6 - (0{,}8)^2 = 6{,}6 - 0{,}64 = 5{,}96\,.$$

Тогда среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5{,}96} \approx 2{,}44\,.$$

Задание №30

Случайная величина X задана функцией распределения вероятности $F(x)$. Найти: а) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(a;\ b)$; б) плотность распределения вероятностей случайной величины X; в) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

726. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases} \qquad a = \frac{1}{2},\ \ b = \frac{3}{4}.$

727. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases} \qquad a = \frac{1}{2},\ \ b = \frac{3}{2}.$

728. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^3 + 3x^2}{4} & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases} \qquad a = \frac{1}{4},\ \ b = \frac{3}{4}.$

729. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ \dfrac{1}{4}(x+1)^2 & \text{при} \quad -1 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases} \qquad a = 0,\ \ b = \frac{1}{3}.$

730. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases} \qquad a = \frac{1}{3},\ \ b = \frac{2}{3}.$

731. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{3}{16}x^2 - \dfrac{x^3}{32} & \text{при} \quad 0 < x \le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases} \qquad a = -2,\ \ b = 3.$

732. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le -2, \\ \dfrac{1}{49}(x+2)^2 \quad при \quad -2 < x \le 5, \\ 1 \quad при \quad x > 5. \end{cases}$ $\quad a=-1, \quad b=3.$

733. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 1, \\ \dfrac{1}{2}(x^2-x) \quad при \quad 1 < x \le 2, \\ 1 \quad при \quad x > 2. \end{cases}$ $\quad a=\dfrac{1}{2}, \quad b=\dfrac{3}{2}.$

734. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le -2, \\ \dfrac{1}{16}(x+2)^2 \quad при \quad -2 < x \le 2, \\ 1 \quad при \quad x > 2. \end{cases}$ $\quad a=-1, \quad b=1.$

735. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 0, \\ 4x-4x^2 \quad при \quad 0 < x \le \dfrac{1}{2}, \\ 1 \quad при \quad x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ $\quad a=-\dfrac{1}{2}, \quad b=\dfrac{1}{4}.$

736. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 1, \\ \dfrac{1}{2}(x-1) \quad при \quad 1 < x \le 3, \\ 1 \quad при \quad x > 3. \end{cases}$ $\quad a=\dfrac{3}{2}, \quad b=\dfrac{5}{2}.$

737. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le -2, \\ \dfrac{1}{9}(x+2)^2 \quad при \quad -2 < x \le 1, \\ 1 \quad при \quad x > 1. \end{cases}$ $\quad a=\dfrac{1}{3}, \quad b=1.$

738. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le -1, \\ \dfrac{1}{9}(x+1)^2 \quad при \quad -1 < x \le 2, \\ 1 \quad при \quad x > 2. \end{cases}$ $\quad a=\dfrac{1}{2}, \quad b=\dfrac{3}{2}.$

739. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 0, \\ x^3 \quad при \quad 0 < x \le 1, \\ 1 \quad при \quad x > 1. \end{cases}$ $\quad a=\dfrac{1}{2}, \quad b=1.$

740. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ 3x^2+2x \ \text{при} \quad 0<x\le \dfrac{1}{3}, \\ 1 \quad \text{при} \quad x>\dfrac{1}{3}. \end{cases} \qquad a=\dfrac{1}{4}, \quad b=\dfrac{1}{3}.$

741. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 2, \\ \dfrac{x}{2}-1 \quad \text{при} \quad 2<x\le 4, \\ 1 \quad \text{при} \quad x>4. \end{cases} \qquad a=\dfrac{3}{2}, \quad b=3.$

742. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{9} \ \text{при} \quad 0<x\le 3, \\ 1 \quad \text{при} \quad x>3. \end{cases} \qquad a=1, \quad b=2.$

743. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{4}x \ \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 1 \quad \text{при} \quad x>1. \end{cases} \qquad a=\dfrac{1}{4}, \quad b=\dfrac{1}{2}.$

744. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le -1, \\ \dfrac{1}{25}(x+1)^2 \ \text{при} \quad -1<x\le 4, \\ 1 \quad \text{при} \quad x>4. \end{cases} \qquad a=0, \quad b=3.$

745. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x \ \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 1 \quad \text{при} \quad x>1. \end{cases} \qquad a=\dfrac{1}{3}, \quad b=\dfrac{2}{3}.$

746. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le \dfrac{1}{4}, \\ \left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2 \ \text{при} \quad \dfrac{1}{4}<x\le \dfrac{5}{4}, \\ 1 \quad \text{при} \quad x>\dfrac{5}{4}. \end{cases} \qquad a=0, \quad b=1.$

747. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x\le 0, \\ x^4 \quad при \quad 0<x\le 1, \\ 1 \quad при \quad x>1. \end{cases}$ $\qquad a=\dfrac{1}{2}, \quad b=1.$

748. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x\le 0, \\ \dfrac{x^3}{8} \quad при \quad 0<x\le 2, \\ 1 \quad при \quad x>2. \end{cases}$ $\qquad a=\dfrac{1}{2}, \quad b=1.$

749. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x\le 2, \\ (x-2)^2 \quad при \quad 2<x\le 3, \\ 1 \quad при \quad x>3. \end{cases}$ $\qquad a=1, \quad b=2{,}5.$

750. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x\le 0, \\ 2x-x^2 \quad при \quad 0<x\le 1, \\ 1 \quad при \quad x>1. \end{cases}$ $\qquad a=\dfrac{1}{2}, \quad b=\dfrac{3}{4}.$

Решение типового примера.

Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \; при \; x\le 0, \\ \sqrt{x} \; при \; 0<x\le 1, \\ 1 \; при \; x>1. \end{cases}$$

Найти:

а) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\frac{1}{9};\frac{1}{4})$;

б) плотность распределения $f(x)$;

в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение.

а) Вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(a;b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a),$$

поэтому

$$P\left(\frac{1}{9}<X<\frac{1}{4}\right)=F\left(\frac{1}{4}\right)-F\left(\frac{1}{9}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

б) Плотность распределения определяется формулой $f(x)=F'(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} 0 \; при \; x \le 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \; при \; 0 < x \le 1, \\ 0 \; при \; x > 1. \end{cases}$$

в) Математическое ожидание вычисляется по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx.$$

$$M(X)=\int_0^1 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2}dx=\frac{1}{3}.$$

Для вычисления дисперсии применим формулу

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X).$$

$$D(X)=\int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx-(\frac{1}{3})^2=\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}dx-\frac{1}{9}=\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=\frac{4}{45}.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{4}{45}}\approx 0{,}3.$$

Задание №31

Диаметр выпускаемой детали – случайная величина, подчиненная нормальному закону с параметрами a и σ (см). Найти: а) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет от α до β см; б) вероятность того, что размер диаметра наудачу взятой детали отличается от номинального на ε см.

751. a=5; σ=0,9; α=4; β=7; ε=2.
752. a=4; σ=0,3; α=3; β=7; ε=1,5.
753. a=3; σ=0,1; α=2; β=4; ε=1,2.
754. a=6; σ=0,4; α=5; β=9; ε=1,3.
755. a=7; σ=0,5; α=6; β=9; ε=0,5.
756. a=8; σ=0,6; α=7; β=10; ε=0,6.
757. a=9; σ=0,7; α=8; β=10; ε=0,7.
758. a=10; σ=0,8; α=9; β=12; ε=0,8.
759. a=11; σ=0,9; α=10; β=12; ε=1.
760. a=12; σ=0,7; α=10; β=13; ε=1,1.
761. a=13; σ=0,8; α=11; β=13; ε=1,2.
762. a=14; σ=0,9; α=12; β=15; ε=1,5.
763. a=15; σ=0,85; α=14; β=17; ε=2,5.
764. a=16; σ=0,9; α=14; β=18; ε=1,3.
765. a=3; σ=0,3; α=2,5; β=3,8; ε=1,2.
766. a=4; σ=0,2; α=2,5; β=4,5; ε=1,1.

767. a=5; σ=0,3; α=3; β=6; ε=1.
768. a=6; σ=0,5; α=7; β=8; ε=0,9.
769. a=7; σ=0,9; α=5; β=10; ε=0,8.
770. a=8; σ=0,9; α=7; β=9; ε=0,7.
771. a=9; σ=0,8; α=7; β=10; ε=0,6.
772. a=10; σ=0,9; α=9; β=11; ε=0,4.
773. a=11; σ=0,8; α=10; β=13; ε=0,5.
774. a=12; σ=1,0; α=10; β=14; ε=1,9.
775. a=13; σ=1,1; α=12; β=14; ε=2.

Решение типового примера. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 170 см и средним квадратическим отклонением 8 см.

1. Найти вероятность того, что рост случайно выбранного мужчины будет от 168 до 176 см.
2. Какова вероятность того, что рост мужчины отклонится от среднего по абсолютной величине не более, чем на 4 см.

Решение. Обозначим X - рост взрослого мужчины.

1. Для нормально распределенной случайной величины вероятность попадания в заданный интервал равна

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, ее значения приведены в приложении №2.

По условию $\alpha = 168$, $\beta = 176$, $a = 170$, $\sigma = 8$, поэтому

$$P(168 < X < 176) = \Phi(\frac{176-170}{8}) - \Phi(\frac{168-170}{8}) = \Phi(0{,}75) - \Phi(-0{,}25) =$$

$$= \Phi(0{,}75) + \Phi(0{,}25) = 0{,}2734 + 0{,}0987 = 0{,}3721.$$

Мы воспользовались нечетностью функции Лапласа и приложением №2.

2. Вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превзойдет заданного числа ε найдем по формуле

$$P(|x-a| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

В нашем случае, $\varepsilon = 4$, $a = 170$, $\sigma = 8$, поэтому

$$P(|x-170| < 4) = 2\Phi(\frac{4}{8}) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383.$$

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3914	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,48	0,1844	0,96	0,3315	1,44	0,4251
0,01	0,0040	0,49	0,1879	0,97	0,3340	1,45	0,4265
0,02	0,0080	0,50	0,1915	0,98	0,3365	1,46	0,4279
0,03	0,0120	0,51	0,1950	0,99	0,3389	1,47	0,4292
0,04	0,0160	0,52	0,1985	1,00	0,3413	1,48	0,4306
0,05	0,0199	0,53	0,2019	1,01	0,3438	1,49	0,4319
0,06	0,0239	0,54	0,2054	1,02	0,3461	1,50	0,4332
0,07	0,0279	0,55	0,2088	1,03	0,3485	1,51	0,4345
0,08	0,0319	0,56	0,2123	1,04	0,3508	1,52	0,4357
0,09	0,0359	0,57	0,2157	1,05	0,3531	1,53	0,4370
0,10	0,0398	0,58	0,2190	1,06	0,3554	1,54	0,4382
0,11	0,0438	0,59	0,2224	1,07	0,3577	1,55	0,4394
0,12	0,0478	0,60	0,2257	1,08	0,3599	1,56	0,4406
0,13	0,0517	0,61	0,2291	1,09	0,3621	1,57	0,4418
0,14	0,0557	0,62	0,2324	1,10	0,3643	1,58	0,4429
0,15	0,0596	0,63	0,2357	1,11	0,3665	1,59	0,4441
0,16	0,0636	0,64	0,2389	1,12	0,3686	1,60	0,4452
0,17	0,0675	0,65	0,2422	1,13	0,3708	1,61	0,4463
0,18	0,0714	0,66	0,2454	1,14	0,3729	1,62	0,4474
0,19	0,0753	0,67	0,2486	1,15	0,3749	1,63	0,4484
0,20	0,0793	0,68	0,2517	1,16	0,3770	1,64	0,4495
0,21	0,0832	0,69	0,2549	1,17	0,3790	1,65	0,4505
0,22	0,0871	0,70	0,2580	1,18	0,3810	1,66	0,4515
0,23	0,0910	0,71	0,2611	1,19	0,3830	1,67	0,4525
0,24	0,0948	0,72	0,2642	1,20	0,3849	1,68	0,4535
0,25	0,0987	0,73	0,2673	1,21	0,3869	1,69	0,4545
0,26	0,1026	0,74	0,2703	1,22	0,3883	1,70	0,4554
0,27	0,1064	0,75	0,2734	1,23	0,3907	1,71	0,4564
0,28	0,1103	0,76	0,2764	1,24	0,3925	1,72	0,4573
0,29	0,1141	0,77	0,2794	1,25	0,3944	1,73	0,4582
0,30	0,1179	0,78	0,2823	1,26	0,3962	1,74	0,4591
0,31	0,1217	0,79	0,2852	1,27	0,3980	1,75	0,4599
0,32	0,1255	0,80	0,2881	1,28	0,3997	1,76	0,4608
0,33	0,1293	0,81	0,2910	1,29	0,4015	1,77	0,4616
0,34	0,1331	0,82	0,2939	1,30	0,4032	1,78	0,4625
0,35	0,1368	0,83	0,2967	1,31	0,4049	1,79	0,4633
0,36	0,1406	0,84	0,2995	1,32	0,4066	1,80	0,4641
0,37	0,1443	0,85	0,3023	1,33	0,4082	1,81	0,4649
0,38	0,1480	0,86	0,3051	1,34	0,4099	1,82	0,4656

0,39	0,1517	0,87	0,3078	1,35	0,4115	1,83	0,4664
0,40	0,1554	0,88	0,3106	1,36	0,4131	1,84	0,4671
0,41	0,1591	0,89	0,3133	1,37	0,4147	1,85	0,4678
0,42	0,1628	0,90	0,3159	1,38	0,4162	1,86	0,4686
0,43	0,1664	0,91	0,3186	1,39	0,4177	1,87	0,4693
0,44	0,1700	0,92	0,3212	1,40	0,4192	1,88	0,4699
0,45	0,1736	0,93	0,3238	1,41	0,4207	1,89	0,4706
0,46	0,1772	0,94	0,3264	1,42	0,4222	1,90	0,4713
0,47	0,1808	0,95	0,3289	1,43	0,4236	1,91	0,4719

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,92	0,4726	2,18	0,4854	2,52	0,4941	2,86	0,4979
1,93	0,4732	2,20	0,4861	2,54	0,4945	2,88	0,4980
1,94	0,4738	2,22	0,4868	2,56	0,4948	2,90	0,4981
1,95	0,4744	2,24	0,4875	2,58	0,4951	2,92	0,4982
1,96	0,4750	2,26	0,4881	2,60	0,4953	2,94	0,4984
1,97	0,4756	2,28	0,4887	2,62	0,4956	2,96	0,4985
1,98	0,4761	2,30	0,4893	2,64	0,4959	2,98	0,4986
1,99	0,4767	2,32	0,4898	2,66	0,4961	3,00	0,49865
2,00	0,4772	2,34	0,4904	2,68	0,4963	3,20	0,49931
2,02	0,4783	2,36	0,4909	2,70	0,4965	3,40	0,49966
2,04	0,4793	2,38	0,4913	2,72	0,4967	3,60	0,499841
2,06	0,4803	2,40	0,4918	2,74	0,4969	3,80	0,499928
2,08	0,4812	2,42	0,4922	2,76	0,4971	4,00	0,499968
2,10	0,4821	2,44	0,4927	2,78	0,4973	4,50	0,499997
2,12	0,4830	2,46	0,4931	2,80	0,4974	5,00	0,499997
2,14	0,4838	2,48	0,4934	2,82	0,4976		
2,16	0,4846	2,50	0,4938	2,84	0,4977		